Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Lösningar till tentamensskrivning, 2013-03-11, SF1648, Partiella differentialekvationer.

---

1. Sök först icke-triviala lösningar till differentialekvationen plus randvillkoren på produktform:

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Insättning i ekvationen ger, efter division med $X(x)T(t)$, att

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = 4\frac{X''(x)}{X(x)} = \text{konstant} = k.$$

För X fås, tillsammans med randvillkoren, (Sturm-Liouville-) problemet

$$X'' - \frac{k}{4}X = 0 \qquad (0 < x < 1),$$

$$X(0) = X(1) = 0.$$

Om $k \geq 0$ finns bara den triviala lösningen $X = 0$, så vi kan anta att $\frac{k}{4} = -\lambda^2 < 0$, för något $\lambda > 0$. Då fås

$$X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x),$$

varvid $X(0) = 0$ ger $A = 0$, och sedan $X(1) = 0$ att λ måste vara ett nollställe till sinus (annars fås bara $X = 0$ identiskt). Alltså: $\lambda = n\pi$ $(n = 1, 2, \dots)$, $k = -4n^2\pi^2$ och

$$X(x) = B\sin n\pi x.$$

Givet k som ovan blir ekvationen för T: $T' + 4n^2\pi^2 T = 0$, med lösningar

$$T(t) = Ce^{-4n^2\pi^2 t}.$$

Vi fann alltså produktlösningarna

$$u(x,t) = B\sin n\pi x \cdot Ce^{-4n^2\pi^2 t}, \qquad n = 1, 2, \dots.$$

Superposition av dessa och omdöpning av konstanterna ger

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-4n^2\pi^2 t}\sin n\pi x.$$

Nu ska begynnelsevillkoret satisfieras. Insättning av $t = 0$ ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\pi x = 1 - x \quad (0 < x < 1)$$

varav

$$C_n = \frac{2}{1} \int_0^1 (1-x) \sin n\pi x \, dx = \cdots = \frac{2}{n\pi}.$$

Alltså får vi svaret på uppgiften:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} e^{-4n^2\pi^2 t} \sin n\pi x.$$

2. a) Ansätt

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Det ger

$$y'' - 8xy' + 2\lambda y = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 8na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2\lambda a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(4n-\lambda)a_n]x^n.$$

Detta ska vara identiskt lika med noll, vilket ger rekursionsformeln

$$a_{n+2} = \frac{2(4n-\lambda)}{(n+2)(n+1)} a_n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

De två första koefficienterna, a_0 och a_1, är fria, och lösningen blir, i termer av dessa,

$$y(x) = a_0(1 - \lambda x^2 + \frac{\lambda(\lambda-8)}{6} x^4 + \ldots) + a_1(x - \frac{\lambda-4}{3} x^3 + \frac{(\lambda-4)(\lambda-12)}{30} x^5 + \ldots)$$

$$= a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x).$$

b) Rekursionsformeln i a) visar att om λ är på formen $\lambda = 4k$ för något heltal $k \geq 0$ så blir $a_{k+2} = a_{k+4} = \cdots = 0$ och därmed en av lösningarna y_0 och y_1 ett polynom. Och om λ inte är på denna form så blir alla lösningar oändliga potensserier. Egenvärdena är alltså $\lambda = 0, 4, 8, 12, 16, \ldots$.

c) För att skriva ekvationen på Sturm-Liouville-form så förlänger vi med faktorn

$$e^{\int (-8x) dx} = e^{-4x^2}.$$

Det ger

$$(e^{-4x^2} y')' + 2\lambda e^{-4x^2} y = 0.$$

Här avläser man från Sturm-Liouville-teorin att

$$w(x) = 2e^{-4x^2}.$$

är en viktsfunktion (detsamma gäller $w(x) = Ce^{-4x^2}$ för godtycklig konstant $C > 0$).

3. a) Vi söker först produktlösningar $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ till differentialekvationen, som blir

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \frac{\Phi''}{\Phi} = 0.$$

Den sista termen beror bara på φ, de två första bara på r. Det följer att dessa delar måste vara konstanta var för sig. Φ måste dessutom vara 2π-periodisk, vilket gör att konstanten för Φ-delen måste vara på formen $-n^2$, $n \geq 0$ heltal. Ekvationen för Φ blir då

$$\Phi'' + n^2\Phi = 0,$$

med lösningar

$$\Phi(\varphi) = a\varphi + b \qquad (n = 0),$$
$$\Phi(\varphi) = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi \qquad (n \geq 1).$$

I första fallet måste $a = 0$ för att Φ ska vara periodisk.
För R får vi ekvationen

$$r^2R'' + rR' - n^2R = 0.$$

Detta är en Eulerekvation. Ansatsen $R = r^\lambda$ ger indexekvationen $\lambda(\lambda - 1) + \lambda - n^2 = 0$ med lösningar $\lambda = \pm n$. Detta ger

$$R = A + B\ln r \qquad (n = 0),$$

$$R(r) = Ar^n + Br^{-n} \qquad (n \geq 1).$$

I båda fallen måste $B = 0$ för att R (och därmed u) inte ska få en singularitet i origo.
Superponerar vi nu alla produktlösningar $R(r)\Phi(\varphi)$ som erhållits ovan så får vi den allmänna lösningen till Laplaces ekvation på formen:

$$u(r,\varphi) = a + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

b) Ovanstående ska anpassas till randvillkoret. Vi har

$$\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi).$$

Med $r = 3$ ser vi att a_n, b_n ska väljas så att

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1}n(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) = 5\cos\varphi - 6\cos 2\varphi.$$

Det ger att $a_1 = 5$, $a_2 = -1$, $a_3 = a_4 = \cdots = 0$, $b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = 0$ samt att a är helt fri. Det ger lösningarna

$$u(r,\varphi) = a + 5r\cos\varphi - r^2\cos 2\varphi$$

(a godtycklig).

c) I detta fall finns ingen lösning, ty randvillkoret ger

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} d\varphi = -\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi = -\pi \neq 0,$$

medan Greens formel å andra sidan ger

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} d\varphi = \iint \Delta u \, r dr d\varphi = 0.$$

4. Låt

$$\hat{u}(\omega, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y) e^{-i\omega x} \, dx.$$

Fouriertransformering av differentialekvationen ger

$$(3 + \cos y) i\omega \hat{u}(\omega, y) + \frac{\partial \hat{u}(\omega, y)}{\partial y} = 0.$$

Denna differentialekvation i y är linjär (och separabel), och integration på vanligt vis ger den allmänna lösningen

$$\hat{u}(\omega, y) = A(\omega) e^{-(3y + \sin y) i\omega}.$$

Med

$$f(x) = \frac{6}{x^2 + 4}.$$

så inses att

$$A(\omega) = \hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega).$$

Inverstransformering ger sedan svaret

$$u(x,y) = f(x - 3y - \sin y) = \frac{6}{(x - 3y - \sin y)^2 + 4}.$$

5. a) Variabelseparation ger

$$\frac{i\hbar T'}{T} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi}\right) = \text{konstant} = E.$$

Detta ger, för T:s del,

$$T(t) = Ce^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

och för Φ:s del,

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0$$

med baslösningar $\Phi(\varphi) = e^{im\varphi}$, där m måste vara ett heltal (positivt, negativt eller noll) för att Φ ska bli 2π-periodisk. För R erhålls ekvationen

$$r^2 R'' + rR' + \left(\frac{2\mu E}{\hbar} r^2 - m^2\right) R = 0,$$

vilket är en form av Bessels differentialekvation av ordning m. De enda lösningar som är reguljära i origo är

$$R(r) = AJ_{|m|}\left(\frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar} r\right).$$

Randvillkoret $R(2) = 0$ ger att $2\frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar} = \alpha_{|m|,n}$, där $\alpha_{|m|,n}$, $n = 1, 2, \ldots$ betecknar nollställena till Besselfunktionen $J_{|m|}$. Energinivåerna blir alltså

$$E = E_{m,n} = \frac{\alpha_{|m|,n}^2 \hbar^2}{8\mu}$$

och de sökta produktlösningarna

$$\psi(r, \varphi, t) = J_{|m|}(\frac{r\alpha_{|m|,n}}{2})e^{im\varphi}e^{-\frac{i\alpha_{|m|,n}^2 \hbar t}{8\mu}},$$

$m = -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

b) Allmänna lösningen till Schrödingerekvationen fås genom superposition av ovanstående produktlösningar, varefter insättning av $t = 0$ ger

$$\psi(r, \varphi, 0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} J_{|m|}(\frac{r\alpha_{|m|,n}}{2})e^{im\varphi}$$

Denna ska identifieras med den givna initialfunktionen, vilket ger att $A_{m,n} = 0$ för $m \neq 0$ (på grund av att initialfunktionen inte beror på φ) och

$$A_{0,n} = \frac{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\pi}} J_0(\frac{r\alpha_{0,n}}{2}) r dr}{\int_0^2 J_0(\frac{r\alpha_{0,n}}{2})^2 r dr}.$$

Efter förenklingar leder detta till svaret

$$\psi(r, \varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}\alpha_{0,n}} \frac{J_1(\frac{\alpha_{0,n}}{2})}{J_1(\alpha_{0,n})^2} J_0(\frac{r\alpha_{0,n}}{2})e^{-\frac{i\alpha_{0,n}^2 \hbar t}{8\mu}}.$$