

Lösningar till tentamensskrivning, 2013-06-05, Partiella differentialekvationer.

1. Sök först icke-triviala lösningar till differentialekvationen och randvillkoren på produktform:

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Insättning i ekvationen ger, efter division med $X(x)T(t)$, att

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = 4 \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{konstant} = 4k.$$

För X fås, tillsammans med randvillkoren, (Sturm-Liouville-) problemet

$$\begin{aligned} X'' - kX &= 0 & (0 < x < \pi), \\ X(0) &= X(\pi) = 0. \end{aligned}$$

Om $k \geq 0$ finns bara den triviala lösningen $X = 0$, så vi kan anta att $k = -\lambda^2 < 0$, för något $\lambda > 0$. Då fås

$$X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x),$$

varvid $X(0) = 0$ ger $A = 0$, och sedan $X(\pi) = 0$ att $\lambda\pi$ måste vara ett nollställe till sinus. Alltså: $\lambda = n$, $n = 1, 2, \dots$, $k = -n^2$ och $X(x) = B \sin nx$.

Ekvationen för T blir nu $T'' + 4n^2T = 0$, med lösningar

$$T(t) = a \cos 2nt + b \sin 2nt.$$

Vi fann alltså produktlösningarna

$$u(x, t) = B \sin nx (a \cos 2nt + b \sin 2nt), \quad n = 1, 2, \dots$$

Superposition av dessa och omdöpfung av konstanterna ger

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx (a_n \cos 2nt + b_n \sin 2nt).$$

Nu ska begynnelsevillkoren satisfieras. Vi har

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2nb_n \sin nx,$$

så jämförelse med de givna begynnelsevillkoren ger direkt att

$$\begin{aligned} a_2 &= 7, & a_n &= 0 \quad \text{för } n \neq 2, \\ 2 \cdot 3 \cdot b_3 &= 12, & 2nb_n &= 0 \quad \text{för } n \neq 3 \end{aligned}$$

Vi får därmed svaret på uppgiften:

$$u(x, t) = 7 \sin 2x \cos 4t + 2 \sin 3x \sin 6t.$$

2. a) Vi har

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r},$$

$$xy' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r},$$

$$x^2 y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r},$$

vilket ger

$$x^2 y'' + 3xy' + (1 + \lambda x)y =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [((n+r)(n+r-1) + 3(n+r) + 1)a_n x^{n+r} + \lambda a_n x^{n+r+1}]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+r+1)^2 a_n + \lambda a_{n-1}] x^{n+r},$$

där vi har satt $a_{-1} = 0$.

Denna potensserie ska vara $= 0$, vilket betyder att alla koefficienter måste vara $= 0$. För $n = 0$ ger detta "indexekvationen" $(r+1)^2 = 0$, med dubbelroten $r = -1$.

För $n \geq 1$ får vi (med $r = -1$)

$$n^2 a_n + \lambda a_{n-1} = 0$$

och därmed rekursionsformeln

$$a_n = -\frac{\lambda}{n^2} a_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Med $a_0 = 1$ ger detta lösningen

$$y(x) = x^{-1} \left(1 - \lambda x + \frac{\lambda^2}{4} x^2 - \frac{\lambda^3}{36} x^3 + \dots \right) = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^n x^n}{(n!)^2}.$$

b) Skriv först ekvationen på normalform:

$$y'' + \frac{3}{x} y' + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{\lambda}{x} \right) y = 0.$$

De två första termerna blir en exakt derivata om vi multiplicerar ekvationen med faktorn

$$e^{\int \frac{3}{x} dx} = x^3.$$

Resultatet blir

$$(x^3 y')' + (x + \lambda x^2) y = 0,$$

som är på önskade formen med

$$p(x) = x^3, \quad q(x) = x, \quad r(x) = x^2.$$

3. Innan vi genomför variabelseparation måste vi subtrahera bort inhomogeniteten i randvillkoren. Funktionen

$$u_0(x, t) = \frac{5x}{\pi}$$

uppfyller differentialekvationen och randvillkoren, så om vi skriver

$$u(x, t) = v(x, t) + \frac{5x}{\pi}$$

så får vi att v ska lösa problemet

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} v(0, t) = 0, \\ v(\pi, t) = 0 \end{cases} \quad v(x, 0) = 2 \cos x - \frac{5x}{\pi}.$$

Ansatsen, för differentialekvationen plus randvillkor,

$$v(x, t) = X(x)T(t)$$

ger att

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \text{konstant} = k.$$

För X ger detta (Sturm-Liouville-) problemet

$$X'' - kX = 0 \quad (0 < x < \pi),$$

$$X(0) = X(\pi) = 0.$$

Om $k \geq 0$ finns bara den triviala lösningen $X = 0$, så vi kan anta att $k = -\lambda^2 < 0$, för något $\lambda > 0$. Då fås

$$X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x),$$

varvid $X(0) = 0$ ger $A = 0$, och sedan $X(\pi) = 0$ att λ måste vara ett nollställe till sinus. Alltså: $\lambda = n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$), $k = -n^2$ och därmed

$$X(x) = B \sin n\pi x.$$

Givet k som ovan blir ekvationen för T : $T' + n^2T = 0$, med lösningar

$$T(t) = Ce^{-n^2t}.$$

Vi fann alltså produktlösningarna

$$v(x, t) = B \sin nx \cdot Ce^{-n^2t}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Superposition av dessa och omdöpfung av konstanterna ger

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2t} \sin nx.$$

Nu ska begynnelsevillkoret satisfieras. Insättning av $t = 0$ ger

$$v(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx.$$

Denna sinusserie ska vara $= 2 \cos x - \frac{5x}{\pi}$, vilket ger

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (2 \cos x - \frac{5x}{\pi}) \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\sin(n-1)x + \sin(n+1)x) \, dx + \frac{10}{\pi^2} \left[\frac{x \cos nx}{n} \right]_0^\pi - \frac{10}{\pi^2} \int_0^\pi \frac{\cos nx}{n} \, dx \\ &= \dots = \frac{4(1+(-1)^n)n}{\pi(n^2-1)} + \frac{10(-1)^n}{n\pi}. \end{aligned}$$

Då $n = 1$ ska den första termen tolkas som $= 0$. Detta ger till slut lösningen

$$u(x, t) = \frac{5x}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4(1+(-1)^n)n}{\pi(n^2-1)} e^{-n^2t} \sin nx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10(-1)^n}{n\pi} e^{-n^2t} \sin nx.$$

4. Låt

$$\hat{u}(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} \, dx$$

vara Fouriertransformen av u med avseende på x (Vi använder BETA:s definition av Fouriertransformen). Fouriertransformering av differentialekvationen ger

$$i\omega \frac{\partial \hat{u}(\omega, t)}{\partial t} = 4(i\omega)^2 \hat{u}(\omega, t).$$

Denna ordinära differentialekvation i t har den allmänna lösningen

$$\hat{u}(\omega, t) = A(\omega) e^{4i\omega t}.$$

För $t = 0$ fås $\hat{u}(\omega, 0) = A(\omega)$, dvs $A(\omega)$ ska vara Fouriertransformen till den givna initialfunktionen: $A(\omega) = \hat{f}(\omega)$, där $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$. Här behöver man egentligen inte beräkna $\hat{f}(\omega)$, ty om man använder den allmänna egenskapen hos Fouriertransformen att en faktor $e^{ia\omega}$ på transformsidan svarar mot en förskjutning $x \mapsto x + a$ på ursprungssidan så får man direkt, med $a = 4t$, att

$$u(x, t) = f(x + 4t) = \frac{2}{1 + (x + 4t)^2}.$$

Om man inte upptäcker detta argument kan man använda t.ex. tabellingång F41b i BETA (3:e uppl.) för att få fram $\hat{f}(\omega)$. Men man måste ändå till slut använda förskjutningsegenskapen (F7 i BETA).

5. a) Den sedvanliga variabelseparationen ger först att

$$\frac{i\hbar T'}{T} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi} \right) = \text{konstant} = E.$$

Den ekvation för T som detta ger har allmän lösning

$$T(t) = C e^{-\frac{iE}{\hbar}t}$$

Därefter inser man att Φ''/Φ måste vara konstant (eftersom inget annat beror på φ). Att $\Phi(\varphi)$ ska vara 2π -periodisk ger att konstanten måste vara på formen $-m^2$, där $m \geq 0$ är ett heltal, så att ekvationen blir

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0,$$

med allmän lösning (på komplex form) $\Phi(\varphi) = Ae^{im\varphi} + Be^{-im\varphi}$. Alltså baslösningar $e^{\pm im\varphi}$. (Reell form, med $\cos m\varphi$ och $\sin m\varphi$, går lika bra.)

Vi har nu två separationskonstanter, E och m (där vi ännu inte vet så mycket om E). Sätter vi in dessa i den översta ekvationen (andra likhetstecknet där) får vi följande ekvation för $R(r)$:

$$r^2 R'' + rR' + \left(\frac{2\mu E}{\hbar^2} r^2 - m^2\right) R = 0.$$

Detta är en form av Bessels differentialekvation (BETA, sid 264), med allmän lösning

$$R(r) = AJ_m\left(\frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar} r\right) + BY_m\left(\frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar} r\right).$$

Här måste $B = 0$ eftersom $R(r)$ ska vara regulär i origo.

Nu har vi ett randvillkor som säger att $R(1) = 0$. Detta ger att $\frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar} = \alpha_{m,j}$ för något $j = 1, 2, \dots$. Detta ger de efterfrågade energinivåerna

$$E = E_{m,j} = \frac{\hbar^2 \alpha_{m,j}^2}{2\mu}$$

($m = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots$). Tillhörande tillstånd för vågfunktionen blir (med $A = 1$)

$$\psi(r, \varphi, t) = J_m\left(\frac{\sqrt{2\mu E_{m,j}}}{\hbar} r\right) e^{\pm im\varphi} e^{-\frac{iE_{m,j}}{\hbar} t} = J_m(\alpha_{m,j} r) e^{\pm im\varphi} e^{-\frac{i\hbar \alpha_{m,j}^2}{2\mu} t}.$$

Här kan $e^{\pm im\varphi}$ bytas mot $e^{im\varphi}$ om man låter m genomlöpa alla heltal. Då måste J_m ersättas med $J_{|m|}$ och $E_{m,j}$ med $E_{|m|,j}$. Detta skrivsätt används i b) nedan.

b) Den allmänna lösningen till Schrödingerekvationen med randvillkor blir nu

$$\psi(r, \varphi, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{m,j} J_{|m|}\left(\frac{\sqrt{2\mu E_{|m|,j}}}{\hbar} r\right) e^{im\varphi} e^{-\frac{iE_{|m|,j}}{\hbar} t}.$$

Sätter vi in $t = 0$ och identifierar med den givna initialfunktionen får vi omedelbart lösningen

$$\begin{aligned} \psi(r, \varphi, t) &= 5J_3\left(\frac{\sqrt{2\mu E_{3,4}}}{\hbar} r\right) e^{3i\varphi} e^{-\frac{iE_{3,4}}{\hbar} t} - 2J_7\left(\frac{\sqrt{2\mu E_{7,8}}}{\hbar} r\right) e^{7i\varphi} e^{-\frac{iE_{7,8}}{\hbar} t} \\ &= 5J_3(\alpha_{3,4} r) e^{3i\varphi} e^{-\frac{i\hbar \alpha_{3,4}^2}{2\mu} t} - 2J_7(\alpha_{7,8} r) e^{7i\varphi} e^{-\frac{i\hbar \alpha_{7,8}^2}{2\mu} t}. \end{aligned}$$
