Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Tentamensssskrivning, 2013-03-11, kl. 14.00-19.00.
SF 1648, Partiella differentialekvationer.

- Tillåtna hjälpmedel: Formelsamlingen BETA (medhavd) samt "Formler ur Asmar" (10 sidor), som delas ut tillsammans med textlappen. (Ej miniräknare.)
- Tentamen består av 5 uppgifter, som var och en bedöms med 0–5 poäng. Betygsgränserna, för den totala poängsumman, inklusive bonus från lappskrivningar, är 23 (betyg A), 20 (betyg B), 17 (betyg C), 14 (betyg D), 11 (betyg E).

---

1. (5p) Bestäm lösningen $u = u(x,t)$ till följande begynnelse/randvärdesproblem för värmeledningsekvationen i en rumsdimension:

$$\begin{aligned} \text{PDE}: &\quad \frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} && \text{för} \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\ \text{RV}: &\quad u(0,t) = u(1,t) = 0 && (t > 0), \\ \text{BV}: &\quad u(x,0) = 1 - x && (0 < x < 1). \end{aligned}$$

2. (5p)

a) Differentialekvationen

$$y'' - 8xy' + 2\lambda y = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

som beror på en parameter λ, är regulär på hela den reella linjen. Bestäm två linjärt oberoende lösningar $y = y(x)$ genom att göra en potensserieansats kring $x = 0$. Det räcker att ta med termer upp till gradtal fem.

b) Lösningarna i a) kommer att bero på λ. För vissa speciella värden på λ ("egenvärdena") finns det lösningar som är polynom (ändliga potensserier). Vilka värden är det?

c) Om $y_1(x)$, $y_2(x)$ är två polynomlösningar (se b)) som hör till olika värden på λ så gäller

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_1(x)y_2(x)w(x)dx = 0$$

för en viss viktsfunktion $w(x) > 0$. Bestäm $w(x)$ genom att skriva differentialekvationen i a) på "Sturm-Liouville-form". (Denna deluppgift kan lösas oberoende av a) och b).)

3. (5p) Laplaceoperatorn ges i polära koordinater (r, φ) av

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

a) Bestäm den allmänna lösningen till Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ i en godtycklig cirkelskiva $0 \leq r < R$ genom att i detalj genomföra variabelseparation och därefter superposition av de erhållna produktlösningarna.

b) Bestäm alla lösningar till randvärdesproblemet (av "Neumanntyp")

$$\text{PDE}: \quad \Delta u = 0 \quad \text{i cirkelskivan } \; 0 \le r < 3,$$
$$\text{RV}: \quad \frac{\partial u}{\partial r}(3,\varphi) = 5\cos\varphi + 6\sin^2\varphi - 6\cos^2\varphi.$$

c) Hur många lösningar finns det om randvillkoret i b) ändras till

$$\frac{\partial u}{\partial r}(3,\varphi) = 5\cos\varphi + 6\sin^2\varphi - 7\cos^2\varphi \quad ?$$

4. (5p) Bestäm en funktion $u(x,y)$ som är definierad i hela (x,y)-planet, som där löser differentialekvationen (av första ordningen)

$$(3+\cos y)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

och som på x-axeln ges av

$$u(x,0) = \frac{6}{x^2+4}.$$

Ledning: Fouriertransformera differentialekvationen i x-led.

5. (5p) Vågfunktionen ψ för en partikel med massa $\mu > 0$ som rör sig fritt i ett plant cirkulärt område uppfyller Schrödingerekvationen, i polära koordinater (r,φ) given av

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right).$$

Här är $\hbar > 0$ (Plancks konstant) och $i = \sqrt{-1}$. Vi antar att det cirkulära området är $0 \le r < 2$ och att $\psi = \psi(r,\varphi,t)$ är noll på randen:

$$\psi(2,\varphi,t) = 0.$$

a) Bestäm alla lösningar på produktform

$$\psi(r,\varphi,t) = R(r)\Phi(\varphi)T(t)$$

till ovanstående problem. Separationskonstanten mellan tidsvariabeln och övriga variabler (närmare bestämt konstanten $E = i\hbar T'(t)/T(t)$) kan tolkas som en energi, och du får använda att denna är positiv. Specificera vilka energinivåer som förekommer bland de tillstånd hos partikeln som svarar mot produktlösningar.

b) Generellt är vågfunktionen en blandning (superposition) av olika produktlösningar. Bestäm tidsutvecklingen av vågfunktionen i fallet att den initialt ges av

$$\psi(r,\varphi,0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} & \text{för } 0 \le r < 1, \\ 0 & \text{för } 1 \le r < 2. \end{cases}$$

Anm: För att skriva svaret på enklast möjliga form kan bl.a. följande formel användas:

$$\int_0^1 J_p(\alpha_{pj}x)^2 x\,dx = \frac{1}{2}J_{p+1}(\alpha_{pj})^2.$$

Här betecknar α_{pj}, $j = 1,2,\ldots$ nollställena till J_p.

LYCKA TILL!