Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Lösningsförslag till tentamensskrivning 2013-05-21.
SF1649, Vektoranalys och komplexa funktioner

---

1. Med

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(u^2-v^2,uv,u)$$

fås

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\pm\int_{-1}^{1}\int_{1}^{2}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(u,v))\cdot(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v})\,dudv$$

$$=+\int_{-1}^{1}\int_{1}^{2}(uv,-u,3)\cdot(-u,-2v,2(u^2+v^2))\,dudv.$$

$$=\int_{-1}^{1}\int_{1}^{2}(-u^2v+2uv+6(u^2+v^2))\,dudv=\int_{-1}^{1}\int_{1}^{2}6(u^2+v^2)\,dudv=32$$

(observera att termer innehållande v till en udda potens ger bidraget noll eftersom v-intervallet är symmetriskt).

2. Direkt uträkning i sfäriska koordinater ger att rot $\boldsymbol{A}=0$, och en potential V erhålles sedan som lösning till

$$\frac{\partial V}{\partial r}=\sin\theta,$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}=\cos\theta,$$
$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}=-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}.$$

Första ekvationen ger

$$V(r,\theta,\varphi)=r\sin\theta+f(\theta,\varphi).$$

Därmed

$$\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}=\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial\theta},$$

som vid jämförelse med den andra ekvationen ger att

$$\frac{\partial f}{\partial\theta}=0,$$

dvs. $f(\theta,\varphi)=g(\varphi)$. Detta gör att

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}=\frac{1}{r\sin\theta}\,g'(\varphi),$$

så jämförelse med en tredje ekvationen ger $g(\varphi)=\cos\varphi$ och därmed svaret

$$V=r\sin\theta+\cos\varphi+C.$$

3. Ekvationen blir

$$\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = -5,$$

vilket ger

$$(e^{iz})^2 + 10ie^{iz} - 1 = 0,$$
$$e^{iz} = -5i \pm \sqrt{-25+1} = (-5 \pm \sqrt{24})i,$$
$$z = -i \log((-5 \pm \sqrt{24})i) = -i(\ln(5 \pm \sqrt{24}) + i(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n))$$
$$= \frac{3\pi}{2} + 2\pi n - i \ln(5 \pm \sqrt{24}), \quad n \text{ godtyckligt heltal.}$$

4. a) Vektorfältet $\boldsymbol{B}$ är väldefinierat i hela rummet och $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = -1 + 1 = 0$. Detta visar att det finns en vektorpotential. För att visa att det finns en just på formen $\boldsymbol{B} = (0, A_y, 0)$ så sätter vi upp ekvationen $\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, vilken då blir

$$-\frac{\partial A_y}{\partial z} = -x,$$
$$0 = 0,$$
$$\frac{\partial A_y}{\partial x} = 2x + z.$$

Detta nystar man lätt upp (som i uppgift 2), och får

$$A_y = x^2 + xz + f(y),$$

där $f(y)$ är en godtycklig funktion av y. Det finns alltså många vektorpotentialer på den sökta formen.

b) Man kan använda resultatet i a) tillsammans med Stokes sats, som direkt ger att flödet bara beror på randen ∂S (olika ytor med samma rand ger samma flöde). ∂S ges av $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2$, med parametrisering t.ex.

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 2, \end{cases}$$

där $0 \le t < 2\pi$ och man konstaterar att växande t ger den riktning på ∂S som enligt korkskruvsregeln hör till den föreskrivna normalvektorn $\boldsymbol{n}$ på ytan. Flödet blir nu

$$\iint_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} \, dS = \oint_{\partial S} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$$

$$= \int_0^{2\pi} (0, \cos^2 t + 2\cos t, f(\sin t)) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) \, dt = \int_0^{2\pi} 2\cos^2 t \, dt = 2\pi.$$

5. a) Komponent nr. k av respektive term är

$$((\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v})_k = v_i \frac{\partial v_k}{\partial x_i},$$

$$(\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}))_k = \varepsilon_{kij}v_i\varepsilon_{jrs}\frac{\partial v_s}{\partial x_r} = \varepsilon_{jki}\varepsilon_{jrs}v_i\frac{\partial v_s}{\partial x_r} = (\delta_{kr}\delta_{is}-\delta_{ks}\delta_{ir})v_i\frac{\partial v_s}{\partial x_r} = v_i\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - v_i\frac{\partial v_k}{\partial x_i},$$

$$(\nabla(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2))_k = \frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{1}{2}v_iv_i) = v_i\frac{\partial v_i}{\partial x_k}.$$

Av detta följer omedelbart den önskade identiteten.

b) Insättning i Eulers ekvation ger, med tanke på de antaganden som gjorts, att

$$\nabla(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2) = -\nabla(\frac{p}{\rho}),$$

varav den önskade slutsatsen följer.

6. Några viktiga punkter i z-planet är spegelpunktsparen (med avseende på den givna cirkeln)

$$\begin{cases} z_1 = 2, \\ z_2 = \infty \end{cases}$$

och

$$\begin{cases} z_3 = \frac{3}{2}, \\ z_4 = 0, \end{cases}$$

samt punkterna på cirkeln

$$z_5 = 1, \quad z_6 = 3.$$

Låt, i de tre fallen a), b), c), $w_1, \ldots, w_6$ beteckna bildpunkterna i w-planet till $z_1, \ldots, z_6$. Punkterna w_1 och w_2 utgör då ett spegelpunktspar med avseende på bildcirkeln i det aktuella fallet, likaså w_3 och w_4, medan w_5 och w_6 ligger på bildcirkeln. (Cirkel betyder i denna uppgift vanlig cirkel eller rät linje.)

a) Här har vi $w_1 = \infty$, $w_2 = 1$, vilket visar att bildcirkeln är en vanlig cirkel med medelpunkt i $w = 1$. På bildcirkeln har vi t.ex. $w_5 = 0$, vilket visar att radien $= 1$. Svaret är allså

$$|w-1| = 1.$$

b) I detta fall har vi $w_1 = 0$, $w_2 = 1$ (spegelpunkter) och $w_5 = \infty$ (på bildcirkeln). Detta visar att bildcirkeln är den räta linjen

$$\operatorname{Re} w = \frac{1}{2}.$$

c) Här använder vi spegelpunktsparet $w_3 = 2$, $w_4 = \infty$, vilket visar att bildcirkeln är en vanlig cirkel med medelpunkt i $w = 2$. På bildcirkeln har vi t.ex. $w_6 = 1$, vilket ger svaret

$$|w-2| = 1.$$

7. a) $\mathbf{A}$ är väldefinierad utom (möjligen) då $\sin\theta = 0$, dvs då $\theta = 0$ eller π. Då $\theta = 0$ är emellertid också täljaren lika med noll och om vi förlänger med $1+\cos\theta$ så ser vi att $\mathbf{A}$ kan skrivas

$$\mathbf{A} = \frac{\sin\theta}{r(1+\cos\theta)}\,\hat{\mathbf{e}}_\varphi,$$

som är singulär bara då $\theta = \pi$, dvs bara på negativa z-axeln. (Taylorutveckling eller l'Hopital kan också användas.)

b) Direkt uträkning i sfäriska koordinater ger att

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\,\hat{\mathbf{e}}_r.$$

c) Eftersom D i detta fall inte innehåller några singulära punkter så ger Stokes sats

$$\int_{\partial D} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS$$
$$= \iint_D \frac{1}{r^2}\,\hat{\mathbf{e}}_r\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \iint_D dS = \operatorname{area}(D)$$

(eftersom $r = 1$ och $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_r$ på D).

d) Om $(0,0,-1)$ tillhör D så är den komplementära D^c till D med avseende på sfären fri från singulariteter. D^c har samma rand som D, men orienteringen är den omvända. Därmed fås

$$\int_{\partial D} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{\partial D^c} \mathbf{A}\cdot d\mathbf{r}$$
$$= -\iint_{D^c} \operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = -\operatorname{area}(D^c) = \operatorname{area}(D) - 4\pi.$$

8. a) I termer av polära koordinater $z = re^{i\varphi}$ med $-\pi < \varphi < \pi$ så ges D av villkoren $0 < r < 1$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Eftersom, om vi skriver $w = u + iv = f(z)$,

$$\begin{cases} u = \ln r, \\ v = \varphi \end{cases}$$

så följer det omedelbart att R blir den halvoändliga rektangeln

$$u < 0, \quad -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}.$$

Cirkeldelen i z-planet svarar mot den lodräta sidan i w-planet, radien från $z = 0$ till $z = \pm 1$ svarar mot den vågräta sidan från $w = \infty$ till $w = \pm\frac{\pi}{2}$ (kopplade tecken).

b) I w-planet blir motsvarande randvärdesproblem, för $U = U(u,v)$ (där $U(u,v) = V(x,y)$):

$$\Delta U = 0 \quad \text{i } R,$$
$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0 \quad \text{för} \quad u = 0, \quad -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2},$$
$$U(u, -\frac{\pi}{2}) = 2, \quad \text{för} \quad -\infty < u < 0,$$
$$U(u, \frac{\pi}{2}) = 4, \quad \text{för} \quad -\infty < u < 0.$$

Normalderivatan $\frac{\partial U}{\partial n}$ ovan är helt enkelt $\frac{\partial U}{\partial u}$, och i och med att denna ska vara $= 0$ och att U ska vara konstant på de vågräta sidorna så förstår man att lösningen bara beror på v. Den måste då vara ett förstagradspolynom, och man finner att den blir

$$U(u,v) = 3 + \frac{2}{\pi}\,v.$$

Substitution via $w = f(z)$ ger sedan svaret

$$V(x,y) = 3 + \frac{2}{\pi}\arctan\frac{y}{x}.$$