Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

SF1649, Vektoranalys och komplexa funktioner
Tentamen, tisdagen den 20 augusti 2013. Lösningsförslag.

1. Vi har

$$[\mathrm{rot}\,(\mathbf{r}\times\mathbf{u})]_i = [\nabla\times(\mathbf{r}\times\mathbf{u})]_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(\mathbf{r}\times\mathbf{u})_k = \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(\epsilon_{klm}x_l u_m) =$$
$$= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\frac{\partial}{\partial x_j}(x_l u_m) = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\frac{\partial}{\partial x_j}(x_l u_m) = \frac{\partial}{\partial x_j}(x_i u_j) - \frac{\partial}{\partial x_j}(x_j u_i).$$

Nu utnyttjar vi sambandet $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$ i första termen och sambandet $\frac{\partial x_j}{\partial x_j} = 3$ i andra termen (trean uppstår eftersom derivatan 1 upprepas tre gånger vid summering). Vi får då

$$\delta_{ij}u_j + x_i\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - 3u_i - x_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = [-2\mathbf{u} + \mathbf{r}\,\mathrm{div}(\mathbf{u}) - (\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{u}]_i.$$

Svar: $-2\mathbf{u} + \mathbf{r}\,\mathrm{div}(\mathbf{u}) - (\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{u}$.

2. Enligt divergenssatsen, flödet är

$$\Phi = \iiint_V \mathrm{div}\,\mathbf{F}\,dxdydz.$$

Formeln för divergence i cylinderkoordinater ger oss

$$\mathrm{div}\,\mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\cdot\rho^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z\rho\sin\phi) = 3\rho + \rho\sin\phi.$$

Trippelintegralen efter övergång till cylinderkoordinater blir

$$\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^2 dz\int_0^1 (3\rho + \rho\sin\phi)\rho\,d\rho = 4\pi.$$

Svar: 4π.

3. (a) För att vara en reel del av funktion som är komplex deriverbar, funktionen u skall vara harmonisk d v s den skall uppfylla Laplaces ekvation. Vi räknar

$$\Delta u = a^2e^{ax}\sin(3y) - 9e^{ax}\sin(3y) = (a^2-9)e^{ax}\sin(3y).$$

Vi får villkor $a^2 = 9$ vilket ger oss värdena $a = \pm 3$.

(b) Vi väljer $a = 3$. Då är $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, där $u(x,y) = e^{3x}\sin(3y)$ och funktionerna u och v uppfyller CR-ekvationer. Vi får då

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -3e^{3x}\cos(3y);$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3e^{3x}\sin(3y).$$

Vi hittar $v(x,y) = -e^{3x}\cos(3y) + C$, där C är en godtycklig reel konstant. Funktionen $f(z)$ blir

$$f = u + iv = e^{3x}\left(\sin(3y) - i\cos(3y)\right) + iC = -ie^{3x}e^{3iy} + iC = -ie^{3z} + iC.$$

Svar: $f(z) = -ie^{3z} + iC$, där C är en godtycklig reel konstant.

4. Likheten som skulle bevisas är en likhet av vektorer. Det räcker att visa att skalärprodukt av dem vänsterled och högerled med en godtycklig konstant vektor $\mathbf{a}$ är lika med varandra. Eftersom en godtycklig vektor $\mathbf{a}$ har form $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$, räcker det att visa likheter

$$\mathbf{e}_i \cdot \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = 2\mathbf{e}_i \cdot \iint_S \mathbf{n}\, dS.$$

för $i = 1, 2, 3$. Eftersom man får byta cykliskt indexer på koordinata vektorer, räcker det att visa likheten för $i = 1$.

Vi tar $i = 1$. Då

$$\mathbf{e}_1 \cdot \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = \oint_C (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = [\text{Stokes sats}] = \iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

Om $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$, då får vi $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{r} = (0, -x_3, x_2)$ och $\operatorname{rot}(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{r}) = (2, 0, 0) = 2\mathbf{e}_1$. Detta ger oss

$$\mathbf{e}_1 \cdot \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = 2\iint_S \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}\, dS = 2\mathbf{e}_1 \cdot \iint_S \mathbf{n}\, dS$$

vilket skulle visas.

5. (a) Vi har

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}dv + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}dw &= (2u, 2v\cos w, 2v\sin w)\, du + \\ &+ (-2v, 2u\cos w, 2u\sin w)\, dv + (0, -2uv\sin w, 2uv\cos w)\, dw = \\ &= 2\sqrt{u^2+v^2} \cdot \frac{(u, v\cos w, v\sin w)}{\sqrt{u^2+v^2}} du + \\ &+ 2\sqrt{u^2+v^2} \cdot \frac{(-v, u\cos w, u\sin w)}{\sqrt{u^2+v^2}} dv + 2uv \cdot (0, -\sin w, \cos w)\, dw = \\ &= h_u \mathbf{e}_u du + h_v \mathbf{e}_v dv + h_w \mathbf{e}_w dw, \end{aligned}$$

varav $h_u = h_v = 2\sqrt{u^2+v^2}$, $h_w = 2uv$ och

$$\mathbf{e}_u = \frac{(u, v\cos w, v\sin w)}{\sqrt{u^2+v^2}}, \qquad \mathbf{e}_v = \frac{(-v, u\cos w, u\sin w)}{\sqrt{u^2+v^2}},$$

$$\mathbf{e}_w = (0, -\sin w, \cos w).$$

Man kollar att vektorerna $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$, $\mathbf{e}_w$ är ortogonala vilket visar att koordinatsystem (u, v, w) är ortogonalt.

(b) Enligt formeln för Laplaces operator i ortogonala koordinater får vi

$$\Delta\phi(u) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_v h_w}{h_u}\frac{\partial \phi}{\partial u}\right) = \frac{1}{8(u^2+v^2)uv}\frac{\partial}{\partial u}\left(uv\frac{\partial \phi}{\partial u}\right).$$

Ekvationen $\Delta\phi = 0$ blir då

$$\frac{d}{du}\left(u\frac{d\phi}{du}\right) = 0$$

vilket ger oss $u\frac{d\phi}{du} = C = \text{Const}$. Vi får

$$\frac{d\phi}{du} = \frac{C}{u}$$

vilket ger $\phi(u) = C\ln u + D$, där C, D är godtyckliga konstanter.

6. (a) Om vektorfältet $\mathbf{F}$ har en potential $g(R,\theta,\phi)$, då är

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} g = \frac{\partial g}{\partial R}\mathbf{e}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial g}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial g}{\partial \phi}\mathbf{e}_\phi.$$

Vi får ekvationer

$$\frac{\partial g}{\partial R} = \frac{AR\cos\phi}{(1+R^2)^2}; \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0; \qquad \frac{\partial g}{\partial \phi} = \frac{\sin\phi}{1+R^2}.$$

Den tredje ekvationen ger oss $g(R,\theta,\phi) = -\frac{\cos\phi}{1+R^2} + C(R,\theta)$. Därefter den andra ekvationen visar att C beror endast på R och till sist den första ekvationen ger oss $A = 2$ och $C = \text{Const}$.

Svar i (a) är $A = 2$.

(b) Från tidigare lösning ser vi att för $A = 2$ vektorfältet $\mathbf{F}$ har potentialen $g = -\frac{\cos\phi}{1+R^2}$. Linjeintegralen blir då

$$g(Q) - g(P) = \frac{7}{10}.$$

7. Cirklarna tangerar varandra i punkten $z = 2$. Detta visar att den första avbildningen som skall tillämpas är Möbiusfunktion $z_1 = \frac{1}{z-2}$ (så att $z = 2$ skickas till oändligheten). Efter avbildningen får vi lodräta bandet $-1/2 < z_1 < -1/4$ i z_1-planet. Nästa steg är att forstora bandet och flytta det så att vi får standarda bandet $0 < z_2 < \pi$. Avbildningen är $z_2 = 4\pi(z_1 + 1/2) = 4\pi z_1 + 2\pi$. Nästa avbildningen är exponent: $z_3 = e^{iz_2} = e^{4\pi i z_1}$. Nytt område ges av olikheten $0 < \arg z_3 < \pi$ vilket ger det övre halvplanet $\operatorname{Im} z_3 > 0$. Till sist, standarda Möbius avbildningen $w = \frac{z_3 - i}{z_3 + i}$ ger oss enhetscirkeln.

Svar:

$$w = \frac{e^{\frac{4\pi i}{z-2}} - i}{e^{\frac{4\pi i}{z-2}} + i}.$$

8. Standard avbildning $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ skickar området D till den nedre halv-planet Ω som ges av $\operatorname{Im} w < 0$. Halv-linjerna $(-\infty,-1)$ och $(1,\infty)$ på reela axeln i z-planet övergår till sig själva och halv-cirkeln $|z| = 1$; $\operatorname{Im} z < 0$ övergår till intervallet $-1 < w < 1$. Vi får då nya problemet i w-planet där $w = u + iv$:

$$\begin{cases} \Delta\psi(u,v) = 0 \text{ om } v < 0; \\ \psi(u,0) = -1 \text{ om } u < -1; \\ \psi(u,0) = 0 \text{ om } -1 < u < 1; \\ \psi(u,0) = 1 \text{ om } 1 < u. \end{cases}$$

Lösningen till det söks som en linjär kombination av functioner 1, $\arg(w-1)$ och $\arg(w+1)$, där värdena av komplexa argumentet väljs i intervallet $(-\pi, \pi)$. Vi hittar

$$\psi(w) = 1 + \frac{1}{\pi}\arg(w-1) + \frac{1}{\pi}\arg(w+1).$$

För att hitta den reella funktionen, observerar vi att

$$\arg w = -\operatorname{arccot}(-u/v)$$

i det nedre halv-planet $v < 0$. Detta ger oss

$$\psi(u,v) = 1 - \frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}((1-u)/v) - \frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}((-1-u)/v).$$

Slutliga funktionen är

$$\phi(x,y) = \psi(u,v),$$

där

$$u = u(x,y) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

och

$$v = v(x,y) = \frac{1}{2}\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$