Institutionen för matematik, KTH,
Björn Gustafsson

Tentamenssskrivning, 2013-05-21, kl. 14.00-19.00.
SF 1649, Vektoranalys och komplexa funktioner.

- Tillåtet hjälpmedel: Formelsamlingen BETA samt TET:s inplastade formelblad (innehållet i detta finns även med som sista sida i denna tentamenstext).
- Tentamen består av totalt 8 uppgifter. Uppgifterna 1-6 bedöms med 0-3 poäng, uppgifterna 7, 8 med 0-4 poäng.
- Den som har godkänt på kontrollskrivningen nummer k ($k = 1, 2, 3$) under vårterminen 2013 har automatiskt full poäng på uppgift nr. k.
- Betygsgränserna (lägsta poängtal för respektive betyg) är 24 (för A), 21 (B), 18 (C), 15 (D), 12 (E), 11 (Fx). Mindre än 11 poäng ger betyg F. Den som får betyg Fx har rätt att komplettera till betyg E. Kontakta i då läraren.

---

1. (3p. Svarar mot KS1.) En yta S i rummet (med koordinater (x, y, z)) är parametriserad enligt

$$\begin{aligned} x &= u^2 - v^2, \\ y &= uv, \\ z &= u, \end{aligned}$$

där $1 \le u \le 2$, $-1 \le v \le 1$. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$$

då $\mathbf{F} = (y, -z, 3)$ och normalvektorn $\hat{\mathbf{n}}$ är riktad så att $n_z > 0$.

2. (3p. Svarar mot KS2.) Ett vektorfält $\mathbf{A}$, definierat överallt utom på z-axeln, ges i sfäriska koordinater (r, θ, φ) av

$$\mathbf{A} = \sin\theta\, \hat{\mathbf{e}}_r + \cos\theta\, \hat{\mathbf{e}}_\theta - \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\, \hat{\mathbf{e}}_\varphi.$$

Visa att $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$ samt bestäm en skalär potential till $\mathbf{A}$.

3. (3p. Svarar mot KS3.) Bestäm samtliga lösningar $z \in \mathbb{C}$ till ekvationen

$$\sin z = -5.$$

4. (3p.) Låt $\mathbf{B}$ vara vektorfältet

$$\mathbf{B} = (-x, 0, 2x + z).$$

a) Visa att $\mathbf{B}$ har en vektorpotential $\mathbf{A}$ (dvs. $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$) på formen $\mathbf{A} = (0, A_y, 0)$.

b) Visa att flödet $\iint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$ av $\mathbf{B}$ genom en orienterad yta S bara beror på ytans rand ∂S, samt beräkna flödet i fallet att S ges av

$$S: \quad z = 2 + (x^2 + y^2 - 1)^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

och normalvektorn $\hat{\mathbf{n}}$ är vald så att $n_z > 0$.

5. a) (2p.) Härled, med hjälp av indexräkning eller på annat sätt, identiteten

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2),$$

där $\mathbf{v}$ är ett godtyckligt vektorfält.

b) (1p.) *Eulers ekvation* för en ideal vätska med konstant täthet ρ är

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p,$$

där $\mathbf{v}$ är flödeshastigheten och p trycket. Använd identiteten i a) för att ur Eulers ekvation härleda *Bernoullis lag*

$$\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + \frac{p}{\rho} = \text{konstant}$$

i fallet att flödet är stationärt (dvs. $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$) och virvelfritt (dvs. $\nabla \times \mathbf{v} = 0$).

6. (3p.) Bestäm bilden av cirkeln $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2| = 1\}$ under följande Möbiustransformationer.

a) $w = \frac{z-1}{z-2}$

b) $w = \frac{z-2}{z-1}$

c) $w = \frac{3}{z}$

7. (4p.) Betrakta vektorfältet givet i sfäriska koordinater av

$$\mathbf{A} = \frac{1 - \cos\theta}{r \sin\theta}\, \hat{\mathbf{e}}_\varphi$$

a) Visa att fältet $\mathbf{A}$ är väldefinierat i hela $\mathbb{R}^3$ utom negativa z-axeln (mera specifikt, visa att det inte är singulärt på positiva z-axeln).

b) Bestäm $\operatorname{rot} \mathbf{A}$.

c) Låt D vara ett delområde av enhetssfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Bestäm ett samband mellan linjeintegralen

$$\int_{\partial D} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

och arean av D i fallet att $(0, 0, -1) \notin D$ (dvs. då D ej skär negativa z-axeln).

d) Gör samma sak som i c) i fallet att $(0, 0, -1) \in D$.

8. (4p.) Låt D vara halvcirkelområdet

$$D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \quad x^2 + y^2 < 1, \quad x > 0\}$$

och låt

$$f(z) = \operatorname{Log} z$$

vara principalgrenen av logaritmfunktionen ($-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$).

a) f avbildar D konformt och en-entydigt på ett område R i w-planet ($w = f(z)$). Bestäm detta område R. Ange även hur de olika delarna av de orienterade ränderna ∂D och ∂R svarar mot varandra.

b) Använd resultatet i a) för att lösa följande randvärdesproblem (där $V = V(x, y)$):

$$\Delta V = 0 \quad \text{i } D,$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0 \quad \text{på halvcirkeldelen av } \partial D,$$

$$V(0, y) = \begin{cases} 2 & \text{för} \quad -1 < y < 0, \\ 4 & \text{för} \quad 0 < y < 1. \end{cases}$$

LYCKA TILL!