Institutionen för matematik, KTH
Serguei Shimorin

SF1649, Vektoranalys och komplexa funktioner
Tentamen, tisdagen den 20 augusti 2013 kl 14.00–19.00.

Svara med motivering och mellanräkningar. Tillåtna hjälpmedel är formelsamlingen BETA samt TETs inplastade formelblad.

För godkänd (betyg E) krävs minst 12 poäng. Betygsgränserna för övriga betyg är 15p för D, 18p för C, 21p för B samt 24p för A. Den som får 11p erbjuds möjlighet till komplettering till godkänd d v s till betyget E. Kontakta i så fall läraren!

Den som klarar kontrollskrivning 1, 2 eller 3 får full poäng på motsvarande uppgift.

L Y C K A T I L L !

(3p) **1.** Förenkla uttrycket

$$\operatorname{rot}(\mathbf{r} \times \mathbf{u})$$

m h av indexräkning. Här $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ är ortsvektorn och $\mathbf{u}$ är ett vektorfält. Svaret får inte innehålla rot eller kryssprodukter.

Ledning: $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.

(3p) **2.** Ett vektorfält ges i cylinderkoordinater (ρ, ϕ, z) av

$$\mathbf{F} = \rho^2 \mathbf{e}_\rho + z\rho \sin\phi \, \mathbf{e}_z.$$

Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ ut ur den cylinder V som i kartesiska koordinater definieras av

$$V: \begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ 0 \le z \le 2. \end{cases}$$

(1p) **3.** (a) Bestäm samtliga värden på parametern a så att funktionen $u(x, y) = e^{ax} \sin 3y$ är en reel del av en funktion $f(z)$, $z = x + iy$, som är komplex deriverbar.

(2p) (b) Bestäm funktionen $f(z)$ (uttryckt i z) för något av sådana a.

(3p) **4.** Låt C vara den positivt orienterade randkurvan till en yta S med enhetsnormalen $\mathbf{n}$. Visa att

$$\oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = 2 \iint_S \mathbf{n} \, dS,$$

där $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ är ortsvektorn.

Ledning: undersök t ex alla komponenter av både vänsterledet och högerledet av likheten som skulle bevisas genom att ta skalärprodukt med koordinata vektorer.

5. Man inför krocklinjiga koordinater (u, v, w) (där $u > 0$, $v > 0$ och $0 \le w < 2\pi$) genom

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = (u^2 - v^2, 2uv \cos w, 2uv \sin w).$$

(1p) (a) Bestäm motsvarande basvektorer $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$, $\mathbf{e}_w$ samt skalfaktorer h_u, h_v, h_w.

(2p) (b) Beräkna en lösning till Laplaces ekvation $\Delta\phi = 0$, som bara beror på u d v s $\phi = \phi(u)$.

v.g. VÄND!

6. Ett vektorfält ges i sfäriska koordinater (R, θ, ϕ) av

$$\mathbf{F} = \frac{AR\cos\phi}{(1+R^2)^2}\mathbf{e}_R + \frac{\sin\phi}{R(1+R^2)\sin\theta}\mathbf{e}_\phi,$$

där A är en konstant.

(1p) (a) Bestäm ett värde på A så att $\mathbf{F}$ blir konservativt.

(2p) (b) Beräkna, för detta värde på A, linjeintegralen

$$\int_P^Q \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

längs en godtycklig kurva från punkten P till punkten Q. Punkterna P och Q ges av

$$P\ :\ R = 1,\ \theta = \pi/3,\ \phi = 0;$$

$$Q\ :\ R = 2,\ \theta = 2\pi/3,\ \phi = \pi.$$

(4p) **7.** Bestäm en konform avbildning $w = f(z)$ av området mellan cirklarna $|z| = 2$ och $|z-1| = 1$ i z-planet till enhetscirkeln $|w| < 1$ i w-planet.

(4p) **8.** Området D i z-planet (där $z = x + iy$) ges av villkor $\operatorname{Im} z < 0$ och $|z| > 1$. Bestäm en reell funktion $\phi(x, y)$ som satisfierar Laplaces ekvation i D och som antar följande värden på D-s rand:

$$\begin{cases} \phi(x,0) = -1 \text{ om } x < -1; \\ \phi(x,y) = 0 \text{ om } x^2+y^2 = 1,\ y < 0; \\ \phi(x,0) = 1 \text{ om } x > 1. \end{cases}$$