Igår så ~~...~~ härledde vi ganska abstrakta resultat

Sats. Om $x_0 \in D_f$ är en inre extrempunkt så $f'(x_0) = 0$ om derivatan existerar

Sats Om $f'(x) > 0$ (och existerar) i $]a, b[$
$(f'(x) < 0)$
så är $f'(x)$ strikt monoton.

Idag ska vi använda det för att rita grafer och hitta extremvärden.

Exempel: Skissa grafen $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ och hitta extremvärden

Svar:

$$\frac{df(x)}{dx} = \left\{ \begin{array}{c} \text{produkt} \\ \text{regeln} \end{array} \right\} = \frac{1}{\ln(x)} \frac{dx}{dx} + x \frac{d \frac{1}{\ln(x)}}{dx} = \left\{ \begin{array}{c} \text{sammans} \\ \text{kedje} \\ \text{regeln} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\ln(x)} - x \frac{1}{(\ln(x))^2} \frac{d \ln(x)}{dx} = \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{(\ln(x))^2} =$$

$$= \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}.$$

Observera att $\ln(x) - 1 < 0$ då $x < e$

$\ln(x) - 1 > 0$ då $x > e$

Så

	$0<x<e$	$x=e$	x
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$		e	

Så $f(x)$ är strikt avtagande $x \in]0, e[$

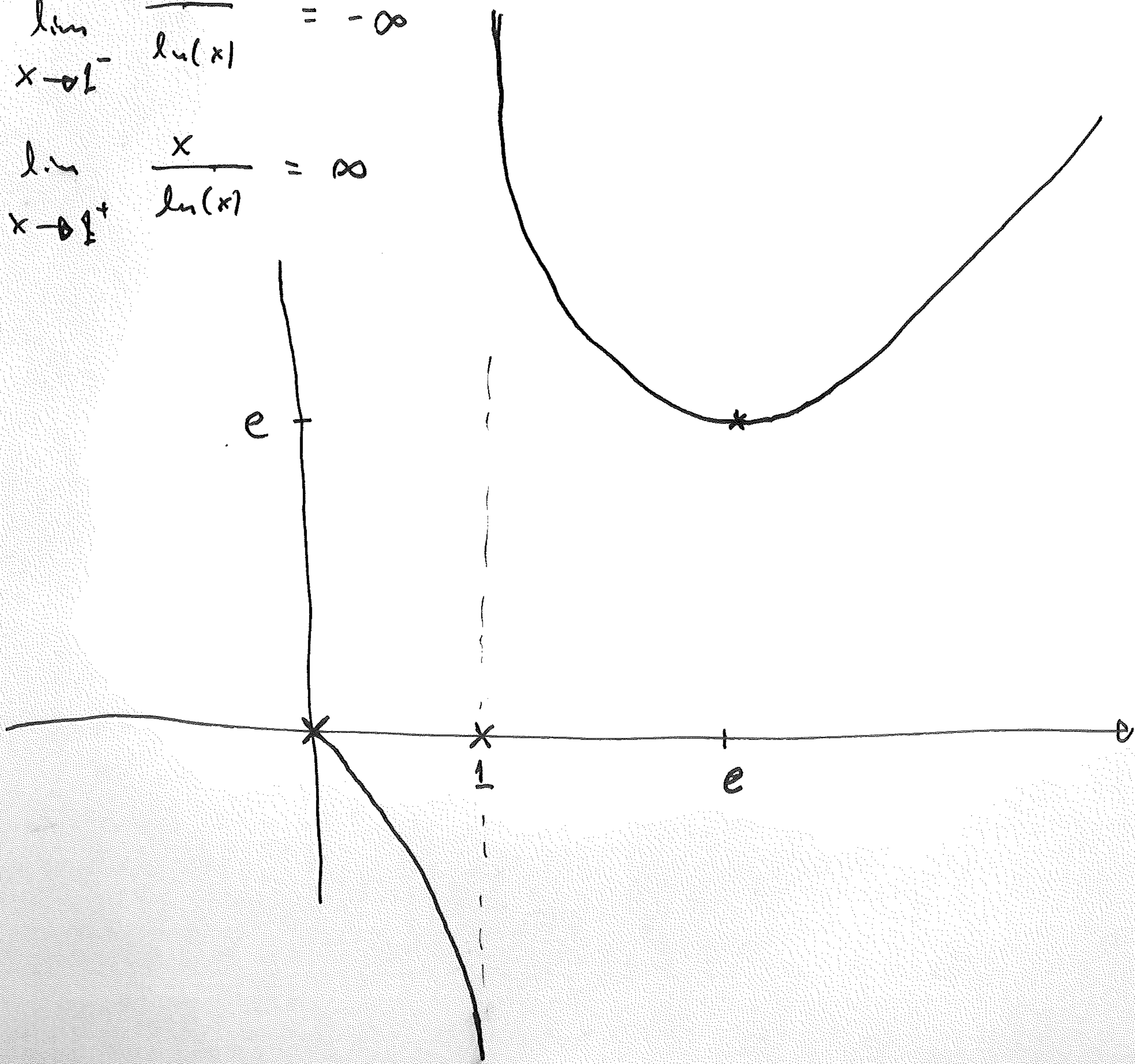
-''- växande $x \in]e, \infty[$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(x)} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\ln(x)} = \infty$$

Och $\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\ln(x)} = -\infty$

$\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\ln(x)} = \infty$



Svar: $\frac{x}{\ln(x)}$ har ett lokalt minima då $x = e$.

Observera att minimipunkten kommer av att

$f'(x) < 0$ då $x < e$

$f'(x) > 0$ då $x > e$.

Sats: Om $f(x)$ har ~~kontinuerlig~~ är deriverbar derivata i $[a, b]$

och $f'(x) < 0$ då $x < \xi$ (>)

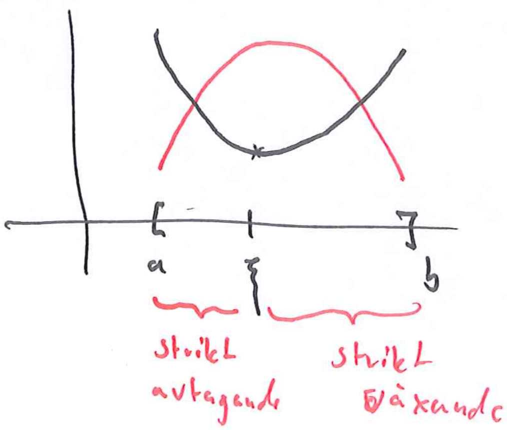
$f'(x) > 0$ då $x > \xi$ (<) för $\xi \in]a, b[$

så har $f(x)$ ett ~~lokalt~~ strikt lokalt

minimum : ξ

maximum

Rita grafer:



Elakt exempel: Låt $f(x) = x^2\left(1+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

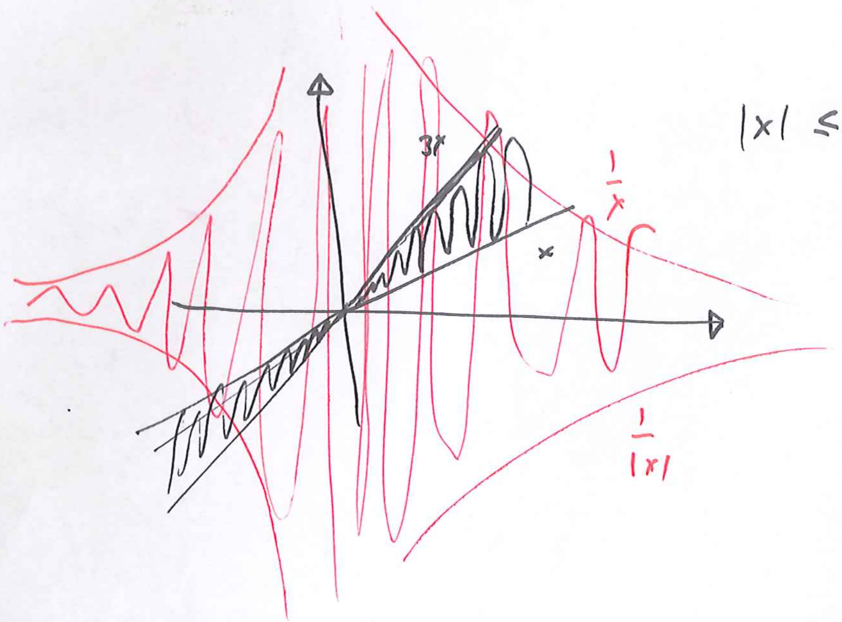
då har $f(x)$ ett globalt minima i $x=0$ men $f(x)$ byter tecken oändligt många gånger i varje omgivning av 0.

Svar ~~Bevis~~ :

$$f(x) \geq \frac{1}{2}x^2 \geq 0 \qquad \text{(likhet endast då } x=0\text{)}$$

$$f'(x) = 2x\left(1+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

då $x \neq 0$.



$$|x| \leq \left|2x\left(1+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right| \leq |3x|$$

Sats: Om $f(x)$ är två gånger kontinuerligt deriverbar i $]a,b[$. $\xi \in]a,b[$. Antag vidare att $f'(\xi)=0$

$f''(\xi)>0$. Då har f ett lokalt strikt minima i ξ.

Bevis: $f''(\xi) \geq \kappa > 0 \Rightarrow f''(x) > \frac{\kappa}{2}$ om $|x-\xi| < \delta_{\kappa/2}$

$\Rightarrow$ $f'(x)$ är strikt växande

$\Rightarrow$ $f'(x) < f'(\xi) = 0$ om $x < \xi$

$f'(x) > f'(\xi) =$ om $x > 0$

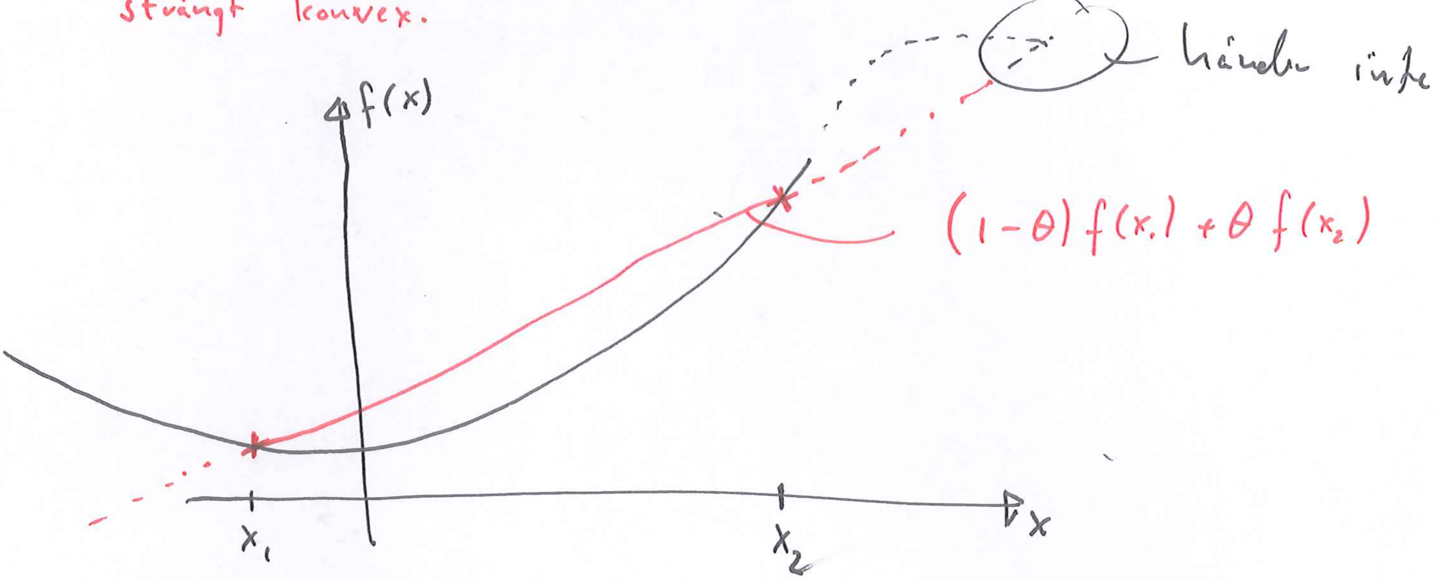
$\Rightarrow$ f har ett lokalt minima i ξ

Konvexa funktioner.

Vi säger att $f(x)$ är konvex i ~~...~~ $[a,b]$, för varje ~~a, b ∈~~ $x_1, x_2 \in [a,b]$ och $\theta \in [0,1]$

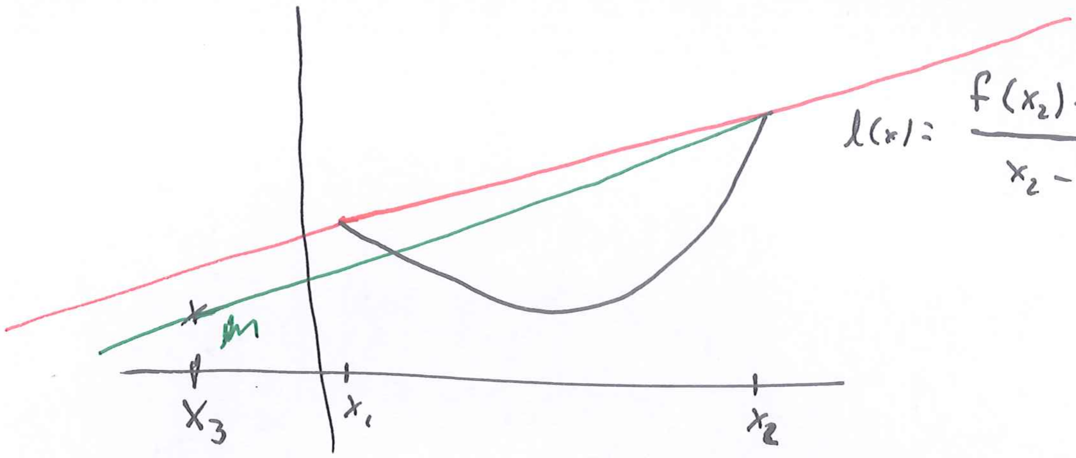
$$f((1-\theta)x_1 + \theta x_2) \leq (1-\theta) f(x_1) + \theta f(x_2)$$

$(<)$ strängt konvex.



~~Varje linje skär en konvex f kontinuerlig konvex funktion;~~

Observera att ~~om~~ ~~f~~



$$l(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$$

då finns det inget $x_3 \notin [x_1, x_2]$ så att

$f(x_3) < \cancel{f(x_3)}\ l(x_3)$.

I så fall skulle $f(x_1) \leq m(x_1) = \dfrac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}(x - x_3) + f(x_3)$

~~Men om vi~~ Sats:

$$\Rightarrow \quad f(x) \geq \lim_{x_2 \to x_1} \left[\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) \right]$$

$$= f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$$

nårhelst gränsvärdet existerar

Sats: Om $f(x)$ är konvex på $\mathbb{R}$. Då existerar

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \xi_+$$

och

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \xi_-$$

och $\lim_{h \to 0^+} \frac{f-f}{h} \geq \lim_{h \to 0^-} \frac{f-f}{h}$.

Bevis (sketch):

Låt $g(h) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ då

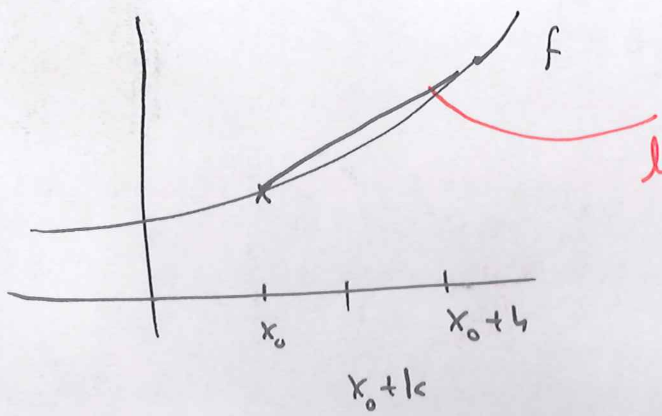
1) ~~då~~ är $g(h)$ växande. för $h > 0$

2) $g(h)$ begränsad underifrån på ~~h~~ $]0,1]$.

3) Det följer att $\lim_{h \to 0^+} g(h)$ = största undre begränsning av ~~]0,1]~~ $g(h)$ på $]0,1]$

För att visa 1) så använder vi att om ukch

så



$$l(x) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}(x - x_0) + f(x_0)$$

Så $f(x_0+k) \leq l(x_0+k) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cancel{(x_0+k-x_0)}\,k + f(x_0)$

Så

$$g(k) := \frac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k} \leq \frac{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cancel{k} + \cancel{f(x_0)} - \cancel{f(x_0)}}{\cancel{k}} = g(h)$$

Så $0<k<h \Rightarrow g(k) \leq g(h)$

så $g(h)$ är växande.

För att visa 2/ så använder vi att

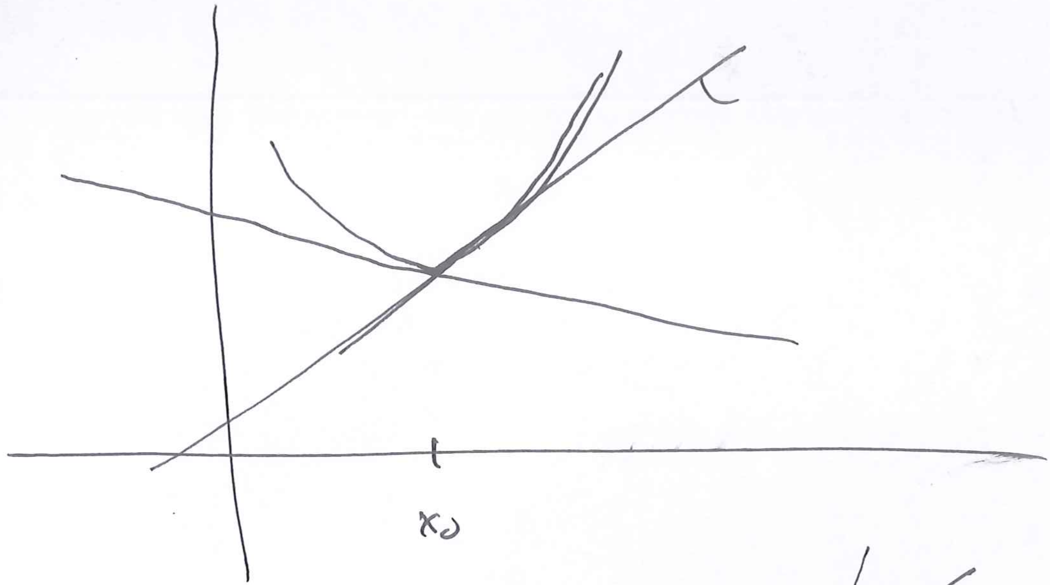
för $x < x_0$ så

$$f(x) \geq g(h)\underbrace{(x-x_0)}_{<0} + f(x_0) \Rightarrow -f(x_0-1)+f(x_0) \leq g(h).$$

~~så om~~ $\cancel{g(h) \to -\infty}$ ~~så kommer~~

$$\cancel{f(x) \geq \lim_{h\to 0} \underbrace{g(h)}_{\to -\infty}\underbrace{(x-x_0)}_{<0} + f(x_0) \to \infty}.$$

För att visa att $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$



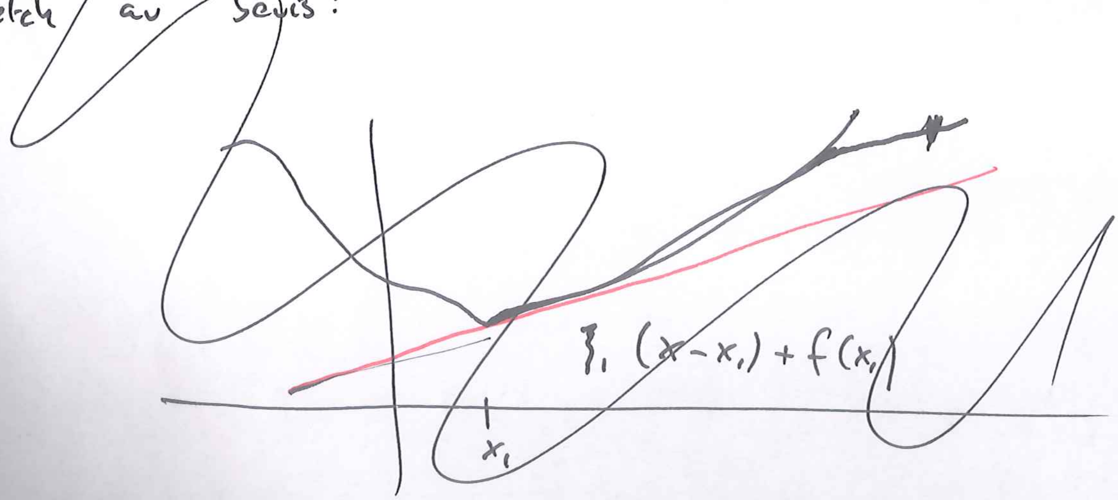
Alternativet

Falskt!

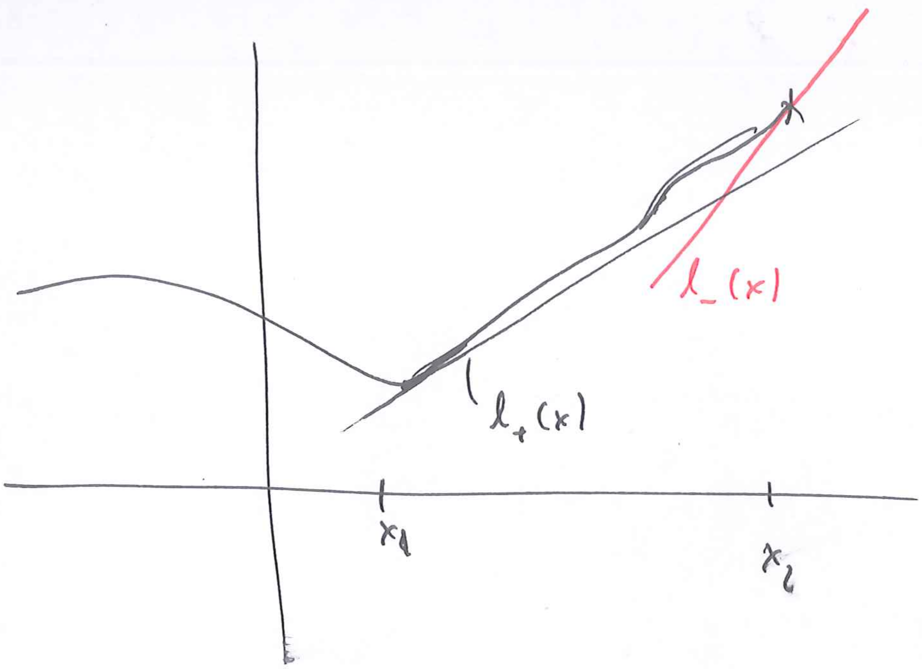
Sats: Om $x_2 > x_1$ så

$$\xi_{1+} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h} \leq \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_2+h) - f(x_2)}{h} = \xi_{2-}$$

Sketch av bevis:



Bevis:



$$l_+(x) = \xi_+(x-x_1) + f(x_1)$$

$$l_-(x) = \xi_-(x-x_2) + f(x_2) \geq \xi_-(x_1-x_2) + \xi_+(x_2-x_1) + f(x_1)$$

$f(x_2) \geq l_+(x_2)$

$$\cancel{f(x_1)} \geq l_-(x_1) \geq \xi_-(x_1-x_2) + \xi_+(x_2-x_1) + \cancel{f(x_1)} \geq$$

$$\geq (\xi_+ - \xi_-)\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}$$

så $\xi_- > \xi_+$. $\blacksquare$

Följdsats: Om f är konvex och f' existerar så är f' växande.