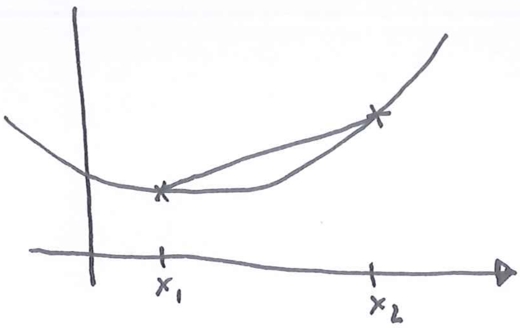
Konvexa funktioner

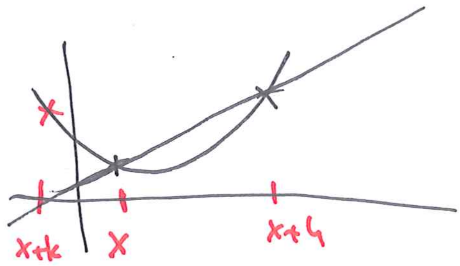
1)



$$f(x) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1)$$

för $x_1 \le x \le x_2$

2)



$$f(x) \ge \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1)$$

för $x < x_1$ eller $x_2 \ge x_1$

3) $$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'_+(x) \quad \text{existerar}$$

4) $$f'_-(x) \le f'_+(x)$$

Bevis: Låt $k<0$ och $h>0$. Då (enl 2))

$$f(x+k) \ge \frac{f(\overbrace{x+h}^{x_2})-f(\overbrace{x}^{x_1})}{h}(\underbrace{x+k}_{x_2}-\underbrace{x}_{x_1})+f(\underbrace{x}_{x_1})$$

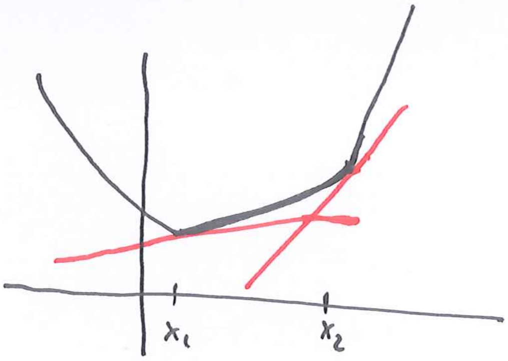
$$\frac{f(x+k)-f(x)}{k} \cancel{\ge} \le \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'_-(x) = \lim_{k\to 0^-}\frac{f(x+k)-f(x)}{k} \le \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'_-(x) \le \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'_+(x).$$

5/ Om $x_2 > x_1$ så $f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2)$

Bevis:



$$f(x_2) \geq f'_+(x_1)(x_2-x_1)+f(x_1) \qquad (1)$$

$$f(x_1) \geq f'_-(x_2)(x_1-x_2)+f(x_2) \qquad (2)$$

$$\cancel{f(x_2)} \geq f'_+(x_1)(x_2-x_1)+f(x_1) \geq \{(2)\} \geq$$

$$\geq f'_+(x_1)(x_2-x_1) + \underbrace{f'_-(x_2)(x_1-x_2)}_{-f'_-(x_2)(x_2-x_1)} + \cancel{f(x_2)}$$

$$\Rightarrow \quad f'_-(x_2) \geq f'_+(x_1).$$

∎

6/ Om $f'(x)$ exsisterar så är $f'(x)$ växande.

Bevis: Om $f'(x)$ existerar så är $f'(x)=f'_+(x)=f'_-(x)$

så enligt föregående punkt så

$$x_2 > x_1 \quad \Rightarrow \quad f'(x_2)=f'_-(x_2) > f'_+(x_1)=f'(x_1).$$

∎

7/ Om f'' existerar så $f''(x) \geq 0$.

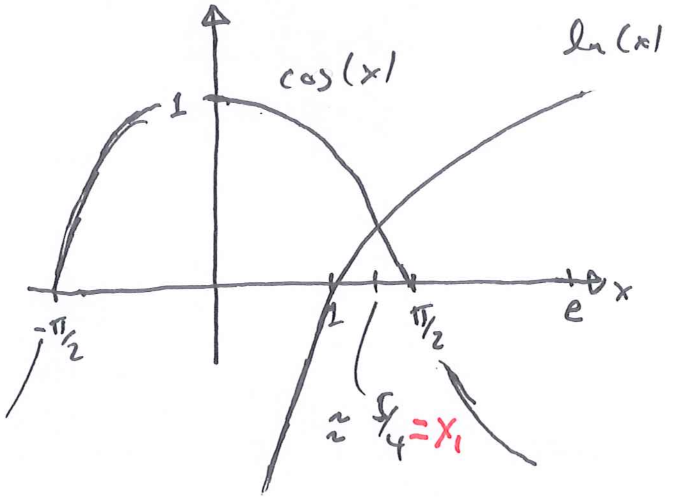
Bevis: f'' existerar $\Rightarrow$ f' existerar $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{enligt} \\ 6/ \end{matrix} \right\} \Rightarrow$ f' växande $\Rightarrow$ $f'' \geq 0$. $\blacksquare$

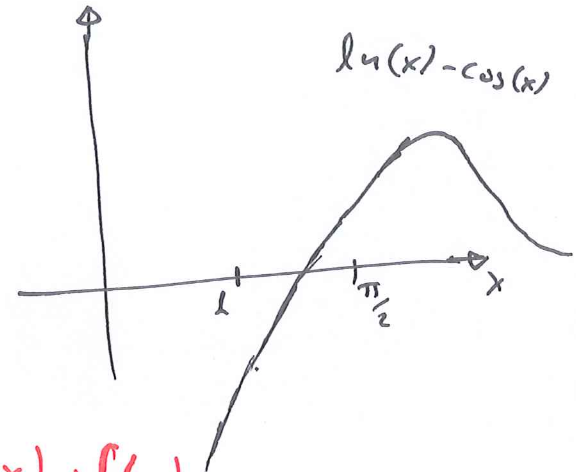
Newton - Rapsons metod.

Exempel. Lös $\cos(x) = \ln(x)$.

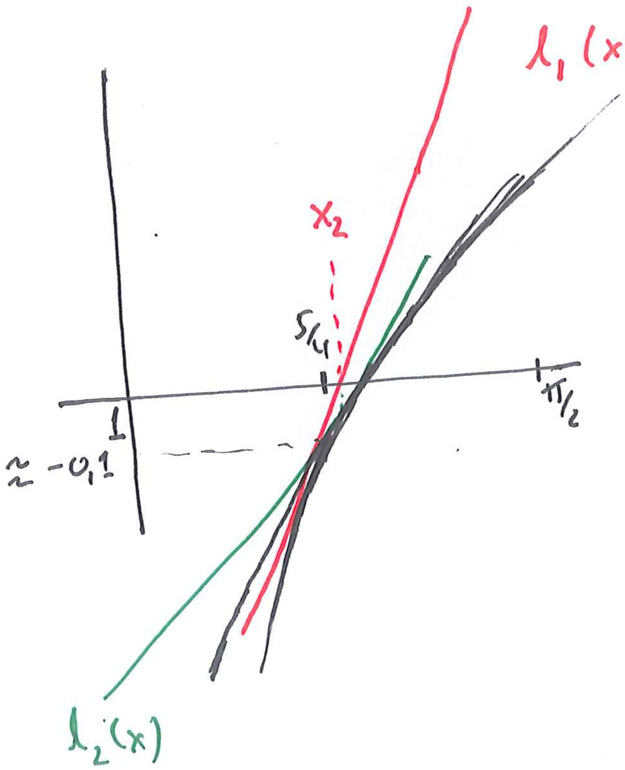
Svar: Vi kan inte lösa den här ekvationen!
I alla fall inte exakt. I alla fall inte jag.



$\Rightarrow$



$$l_1(x) = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1)$$



Observera att $l_1(x)$ är en god approximation till $\ln(x) - \cos(x)$ nära $x_1 = 5/4$

Så om x_2 löser $l_1(x_2) = 0$

dvs $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

Låt $l_2(x)$ vara tangenten i x_2.

Och $x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$, som löser $l_2(x_3) = 0$,

borde vara en bättre approximation.

$x_1 = 5/4$

$$x_2 = 5/4 - \frac{\ln(5/4) - \cos(5/4)}{4/5 + \sin(5/4)} \approx 1.3027$$

$x_3 =$ — " — ≈ 1.3029

$\Rightarrow \ln(x_3) - \cos(x_3) \approx -0.000106$

Så lösningen borde ligga nära 1.3029. $\blacksquare$

Newton - Rapsons metod.

Vi vill lösa $f(x)=0$.

1) Vi gissar en lösning x_1 (t.ex. genom att skissa en graf)

2) Vi sätter $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.

3) Låt $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. Då kommer $f(x_0)=0$, ELLER!

Hur vet vi det?

Sats: Antag att

1) $F(x)$ är deriverbar : $[a,b]$

2) $\exists \alpha \in [a,b]$ så att $F(\alpha)=\alpha$ (T.ex $F(a)<a$, $F(b)>b$)

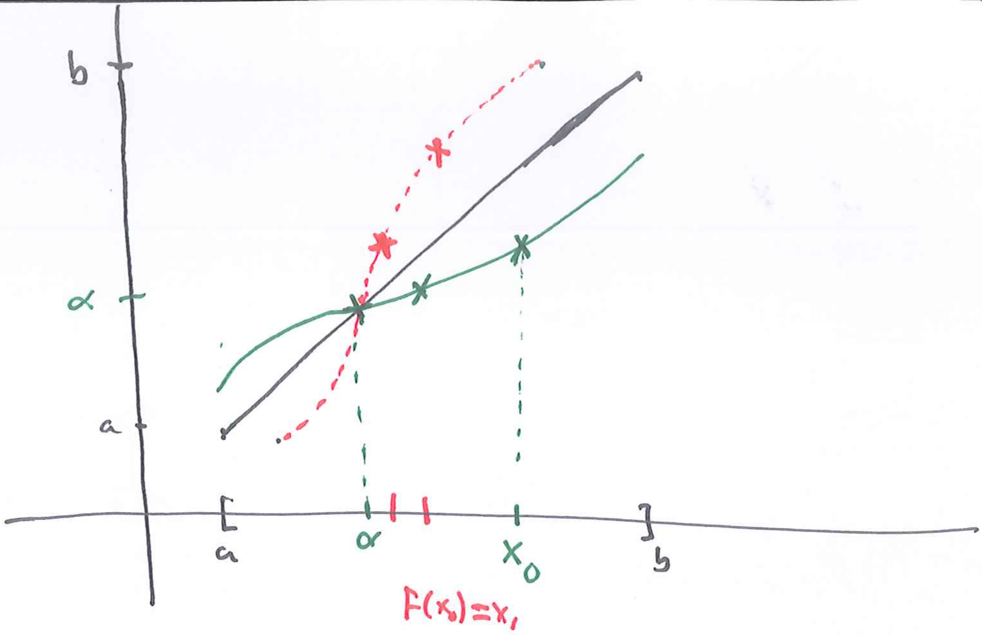
Det finns ett $c>0$ så att

3) $|F'(x)| \leq c < 1$ för alla $x \in [a,b]$

4) $F(x) \in [a,b]$ för alla $x \in [a,b]$.

~~Då kommer x_{k+1}~~

Låt $x_0 \in [a,b]$ och $x_{k+1} = F(x_k)$, då kommer $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \alpha$, ~~gränsv~~ gränsvärdet existerar.



<u>Bevis:</u> Observera att

$$|x_k-\alpha| = |F(x_{k-1})-F(\alpha)| = \left\{\begin{matrix}\text{Medelvärdessatsen} \\ \text{så det finns} \\ \xi \in \,]x_k,\alpha[\\ \text{eller } \xi \in \,]\alpha, x_k[\end{matrix}\right\} =$$

$$= |F'(\xi)(x_{k-1}-\alpha)| \leq |F'(\xi)||x_{k-1}-\alpha| \leq \left\{|F'(\xi)|<c\right\} \leq$$

$$\leq c|x_{k-1}-\alpha| \leq \ldots \leq c^2|x_{k-2}-\alpha| \leq \ldots \leq c^k|x_0-\alpha|$$

Så $\lim_{k\to\infty} |x_k-\alpha| \leq \left\{\begin{matrix}\text{Olikhet:} \\ \text{övergång av} \\ \text{gränsvärden}\end{matrix}\right\} \leq \lim_{k\to\infty} c^k|x_0-\alpha| \leq$

$$\leq \left\{\begin{matrix} c^k \to 0 \\ \text{då } k\to\infty \\ \text{och } |c|<1\end{matrix}\right\} = 0.$$

$\boxtimes$

Följdsats: Låt $f(x)$ vara två gånger deriverbar och

i) $|f'(x)| > \gamma$, $|f''| < C_0$: $[a,b]$

ii) $f(a) < 0$ och $f(b) > 0$

iii) $|b-a| < \dfrac{\gamma^2}{C_0 \Gamma}$ $\left[\dfrac{C_0}{\gamma^2} < \dfrac{1}{\Gamma |b-a|} \right]$

då kommer $x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}$, för varje $x_0 \in [a,b]$

att konvergera till en lösning till $f(x) = 0$.

Bevis: Låt $F(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Då kommer

$$|F'(x)| = \left| 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} \right| = \left| \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} \right| \leq \begin{Bmatrix} \text{Ant.} \\ \text{i} \end{Bmatrix} \leq$$

$$\leq \frac{|f(x)|}{\gamma} \frac{C_0}{\gamma} < \frac{|f(x)|}{\Gamma |b-a|}.$$

Nu så finns det, enl. antagande ii) och satsen om mellanliggande värden, ett $\alpha \in [a,b]$ så att $f(\alpha) = 0$

$$|f(x)| = |f(x) - f(\alpha)| \leq \begin{Bmatrix} \text{medelv.} \\ \text{satsen} \end{Bmatrix} \leq |f'(\xi)| |x - \alpha| \leq$$

$$\leq |f'(\xi)| |b-a| \leq \Gamma |b-a|$$ så

$|F'(x)| < \dfrac{\Gamma}{\Gamma} = 1$. Så $|F'(x)| < 1$ så

Föregående sats är applicerbar. ∎

Fel uppskattning.

Vi vet att $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ konvergerar till en lösning. Men hur nära är x_k, säg x_{10}, till den riktiga lösningen.

Sats: Låt $f(\alpha) = 0$ och $|f'(x)| \geq m > 0$ i ~~den~~ intervallet ~~som~~ $[\bar{\alpha}, \alpha]$ (eller $[\alpha, \bar{\alpha}]$)

Då $|\bar{\alpha} - \alpha| \leq \frac{|f(\bar{\alpha})|}{m}$.

Bevis: Enl. medelvärdessatsen så finns det ett $\xi \in [\bar{\alpha}, \alpha]$ så att

$$|f(\bar{\alpha})| = |f(\bar{\alpha}) - f(\alpha)| = |f'(\xi)| |\alpha - \bar{\alpha}| \Rightarrow$$

$$|\alpha - \bar{\alpha}| = \frac{|f(\bar{\alpha})|}{|f'(\xi)|} \leq \frac{|f(\bar{\alpha})|}{m}.$$

∎

Exempel. (Forts.) ~~Vi~~ Om $f(x) = \ln(x) - \cos(x)$

så $f'(x) = \frac{1}{x} + \sin(x) \geq 3/2$ så ~~att~~

den riktiga lösningen α till

$\ln(x) - \cos(x) = 0$ uppfyller

$$|\alpha - 1.3029| \leq \frac{1.06 \times 10^{-4}}{3/2} \leq 10^{-4}.$$

∎