Integration

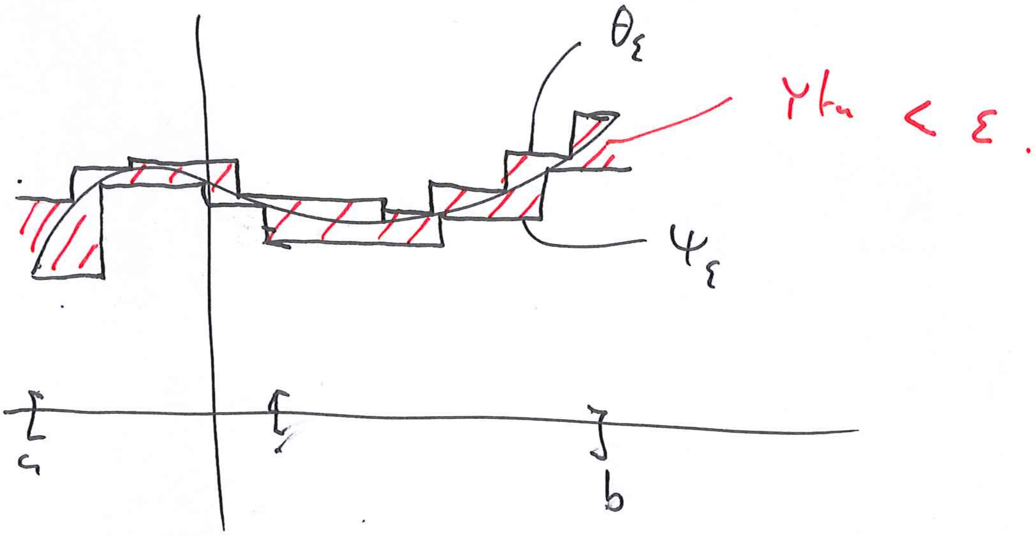
Förra föreläsningen så definierade vi integrerbar

Def: Vi säger att $f(x)$ är integrerbar över $[a,b]$ om det ~~finns~~ ~~trapp~~ för varje $\varepsilon > 0$ finns trappfunktioner $\Psi_\varepsilon, \Theta_\varepsilon$ så att

$$\Psi_\varepsilon(x) \le f(x) \le \Theta_\varepsilon(x) \quad \text{för } x \in [a,b]$$

och

$$0 \le I(\Theta_\varepsilon) - I(\Psi_\varepsilon) < \varepsilon$$

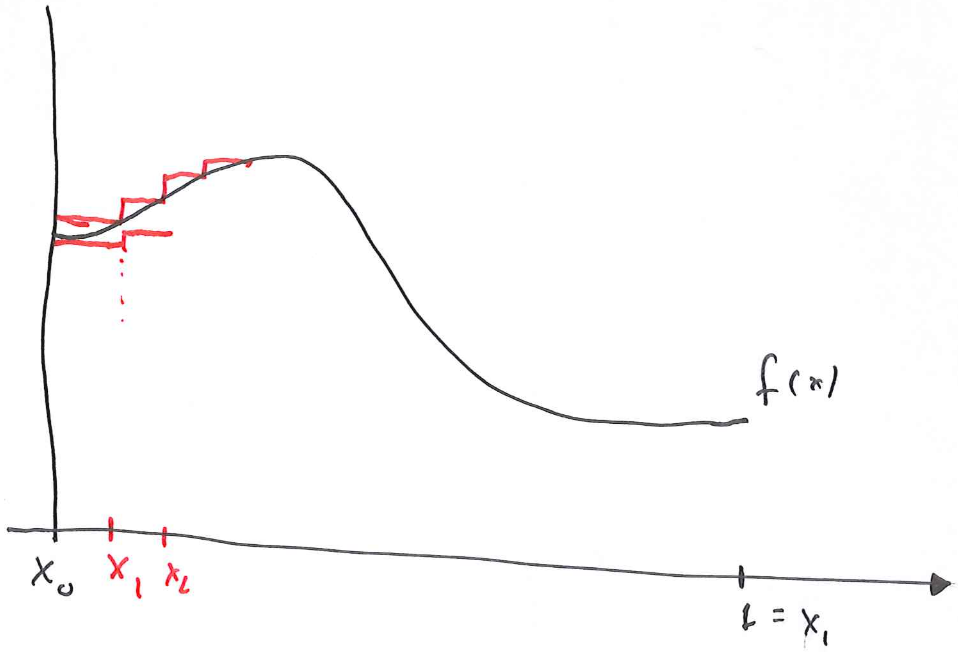


Sats: Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a,b]$ så är $f(x)$ integrerbar på $[a,b]$.

Hur bevisar vi detta?

Naiv ide (funkar inte!)

Säg $[a,b] = [0,1]$



Vi vill hitta någon indelning $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$

Och

$$\left.\begin{aligned} \psi_\varepsilon(x) &= a_i \quad \text{då} \quad x_{i-1} < x < x_i \\ \theta_\varepsilon(x) &= b_i \quad \text{då} \quad x_{i-1} < x < x_i \end{aligned}\right\} \text{trappfunktioner.}$$

Samma indelning!

Så att $\psi_\varepsilon(x) \le f(x) \le \theta_\varepsilon(x)$

och
$$I(\theta_\varepsilon) - I(\psi_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon$$

~~Säg~~ Det är tillräckligt att $0 \le b_i - a_i < \varepsilon$

för då är
$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(b_i - a_i)}_{<\varepsilon}(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon(\cancel{x_1} - \underbrace{x_0}_{=0} + \cancel{x_2} - \cancel{x_1} + \cancel{\dots} + \underbrace{x_n}_{=1} - \cancel{x_{n-1}})$$

$< \varepsilon$

Vi har ännu inte använt kontinuitet!

Eftersom f är kontinuerlig ~~så~~ i x_0 så finns det ett $\delta_{x_0,\varepsilon}$ så att $-\frac{\varepsilon}{4} < f(x) - f(x_0) < \frac{\varepsilon}{4}$ för alla x så att $|x - x_0| < \delta_{x_0,\varepsilon}$.

Sätt $x_1 = x_0 + \delta_{x_0,\varepsilon}$ och

$0 \leq x < x_1$

$a_1 = f(x_0) - \frac{\varepsilon}{4}$ då $f(x) > f(x_0) - \frac{\varepsilon}{4} \geq a_1$

$b_1 = f(x_0) + \frac{\varepsilon}{4}$ då $f(x) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{4} \leq b_1$

På samma sätt så finns det ett $\delta_{x_1,\varepsilon}$ så att

$-\frac{\varepsilon}{4} < f(x) - f(x_1) < \frac{\varepsilon}{4}$ då $|x - x_1| < \delta_{x_1,\varepsilon}$

Så vi kan välja $x_2 = x_1 + \delta_{x_1,\varepsilon}$

$a_2 = f(x_1) - \frac{\varepsilon}{4}$ $f(x) > f(x_1) - \frac{\varepsilon}{4} \geq a_2$ $x_1 < x < x_2$

$b_2 = f(x_1) + \frac{\varepsilon}{4}$ $f(x) < f(x_1) + \frac{\varepsilon}{4} = b_2$ — " —

$\vdots$

Välj induktivt

$x_0 = 0$, $x_i = x_{i-1} + \delta_{x_{i-1},\varepsilon}$

$a_i = f(x_{i-1}) - \frac{\varepsilon}{4}$

$b_i = f(x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{4}$

Då kommer $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$

Vänta!

Hur vet vi detta!

Vi vet att

$$x_n = x_{n-1} + \delta_{x_{n-1},\varepsilon} = x_{n-2} + \delta_{x_{n-2},\varepsilon} + \delta_{x_{n-1},\varepsilon} = \dots = \cancel{\sum_{i=0}^{n-1} \delta_{x_i,\varepsilon}}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{x_i,\varepsilon}$$ men om $\delta_{x_i,\varepsilon} \to 0$ då i ökar

så kanske inte $x_n \geq 1$ för något n!

(Om t.ex. $\delta_{i,\varepsilon} = \frac{1}{2^i}$ så $x_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 2$).

Vi måste hitta ett sätt att försäkra oss om att $\delta_{x_i,\varepsilon}$ inte går till 0. Det lättaste är att införa ett antagande.

Definition: Vi säger att $f(x)$ är uniformt kontinuerlig på $[a,b]$ om det finns, för varje $\varepsilon > 0$, ett $\delta_\varepsilon > 0$ så att

$$|x-y| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

för alla $x, y \in [a,b]$.

Observera att detta är starkare än f kontinuerlig. Om f är kontinuerlig på $[a,b]$ så finns det för varje x och varje $\varepsilon > 0$ ett $\delta_{x,\varepsilon} > 0$ så att

$$|x-y| < \delta_{x,\varepsilon} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

för alla $y \in [a,b]$. Men δ beror på x.

För uniformt kontinuerliga funktioner så kan man ha samma δ för alla x!

Sats: Om $f(x)$ är uniformt kontinuerlig på $[a,b]$ så är $f(x)$ integrerbar på $[a,b]$.

Bevis: Fixera ett $\varepsilon > 0$ då finns det ett $\delta_{\varepsilon} > 0$ så att, om $x, y \in [a,b]$,

$$|x-y| < \delta_{\varepsilon} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

dvs om

$$x \leq y < \delta_{\varepsilon} \quad \text{så} \quad f(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(y) < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} + f(x) \qquad (1)$$

Låt $x_i = a + i\delta_\varepsilon$ ~~och~~ för $i \leq \left[\frac{b-a}{\delta_\varepsilon}\right] = n-1$

och $x_n = b$ och definiera stegfunktionerna

$$\psi_\varepsilon(x) = a_i = f(x_i) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad \text{om} \quad x \in \left]x_{i-1}, x_i\right[$$

$$\Theta_\varepsilon(x) = b_i = f(x_i) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad \text{om} \quad \text{— '' —}$$

Då kommer $\psi_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \Theta_\varepsilon$ enl. 1

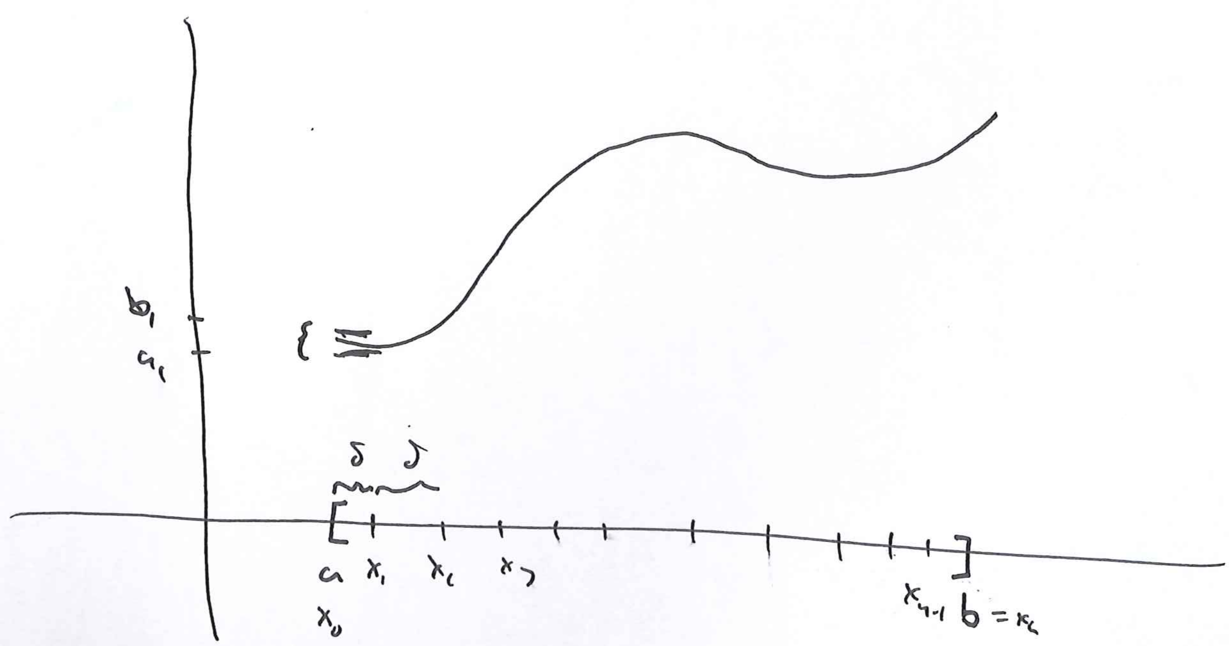
Och $0 \leq \Theta_\varepsilon(x) - \psi_\varepsilon(x) = \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$

så $0 \leq I(\Theta_\varepsilon(x)) - I_\varepsilon(\psi_\varepsilon) \cancel{\leq} \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

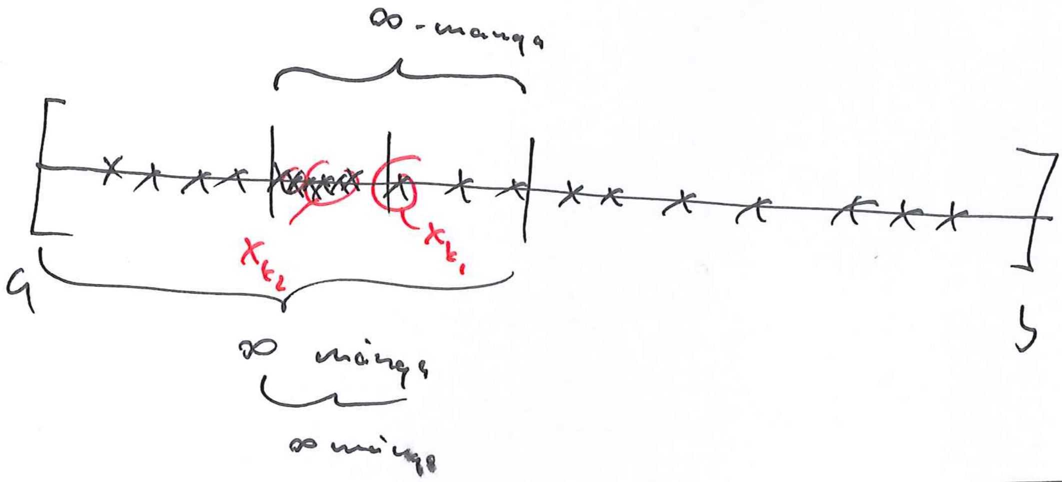
Så för varje $\varepsilon > 0$ så finns $\psi_\varepsilon, \Theta_\varepsilon$ e.t.c.

enl. def för integrerbar.

Så f är integrerbar ■



Sats (Bolzano-Weierstrass) Om $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \in [a,b]$ är oändligt många punkter i $[a,b]$ så finns det en delsekvens $x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, \ldots, x_{k_j}, \ldots$ så att $\lim_{j \to \infty} x_{k_j}$ existerar.



Sats 2: Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a,b]$ så är $f(x)$ uniformt kontinuerlig på $[a,b]$.

Följdsats Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a,b]$ så är $f(x)$ integrerbar på $[a,b]$.

Bevis: $f(x)$ kont. på $[a,b]$ $\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{Sats 2}}$ $f(x)$ uniformt kont på $[a,b]$

$\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{sats 1}}$ $f(x)$ integrerbar på $[a,b]$

$\blacksquare$

Bevis sats 2: Vi vill visa att det för alla $\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta_\varepsilon > 0$ så att

$$|x-y| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \qquad (*).$$

Vi använder ett motsägelse argument och antar att det finns ett $\varepsilon > 0$ så att det inte finns något $\delta_\varepsilon > 0$ så att $(*)$ håller.

Speciellt så är inte $1/k$ något δ_ε så att $(*)$ håller. Så det finns x_k och y_k så att

$$|x_k - y_k| < 1/k \quad \text{och} \quad |f(x_k) - f(y_k)| > \varepsilon.$$

dvs

$$f(x_k) > f(y_k) + \varepsilon$$

antag detta (**)

~~eller~~

$$\cancel{f(y_k) > f(x_k) + \varepsilon}$$

Nu så är $x_1, x_2, \dots x_k, \dots$ en oändlig sekvens tal i $[a,b]$ så det finns en delsekvens x_{k_j} så att $\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = x_0$ för något $x_0 \in [a,b]$.

Men $|x_{k_j} - y_{k_j}| < \frac{1}{k_j}$ så $|y_{k_j} - x_0| \leq \left\{\begin{matrix}\text{triangel}\\ \text{olik}\end{matrix}\right\} \leq$

$$\leq |y_{k_j} - x_{k_j}| + |x_{k_j} - x_0| \leq \frac{1}{k_j} + |x_{k_j} - x_0|$$

Så

$$\lim_{j\to\infty} |y_{k_j} - x_0| \leq \left\{\begin{matrix}\text{övergång}\\ \text{av olikhet}\\ \text{i gränsvärde}\\ \text{summa regel}\end{matrix}\right\} \leq \lim_{j\to\infty} \frac{1}{k_j} + \lim_{j\to\infty} |x_{k_j} - x_0| = 0$$

Så $y_{k_j} \to x_0$.

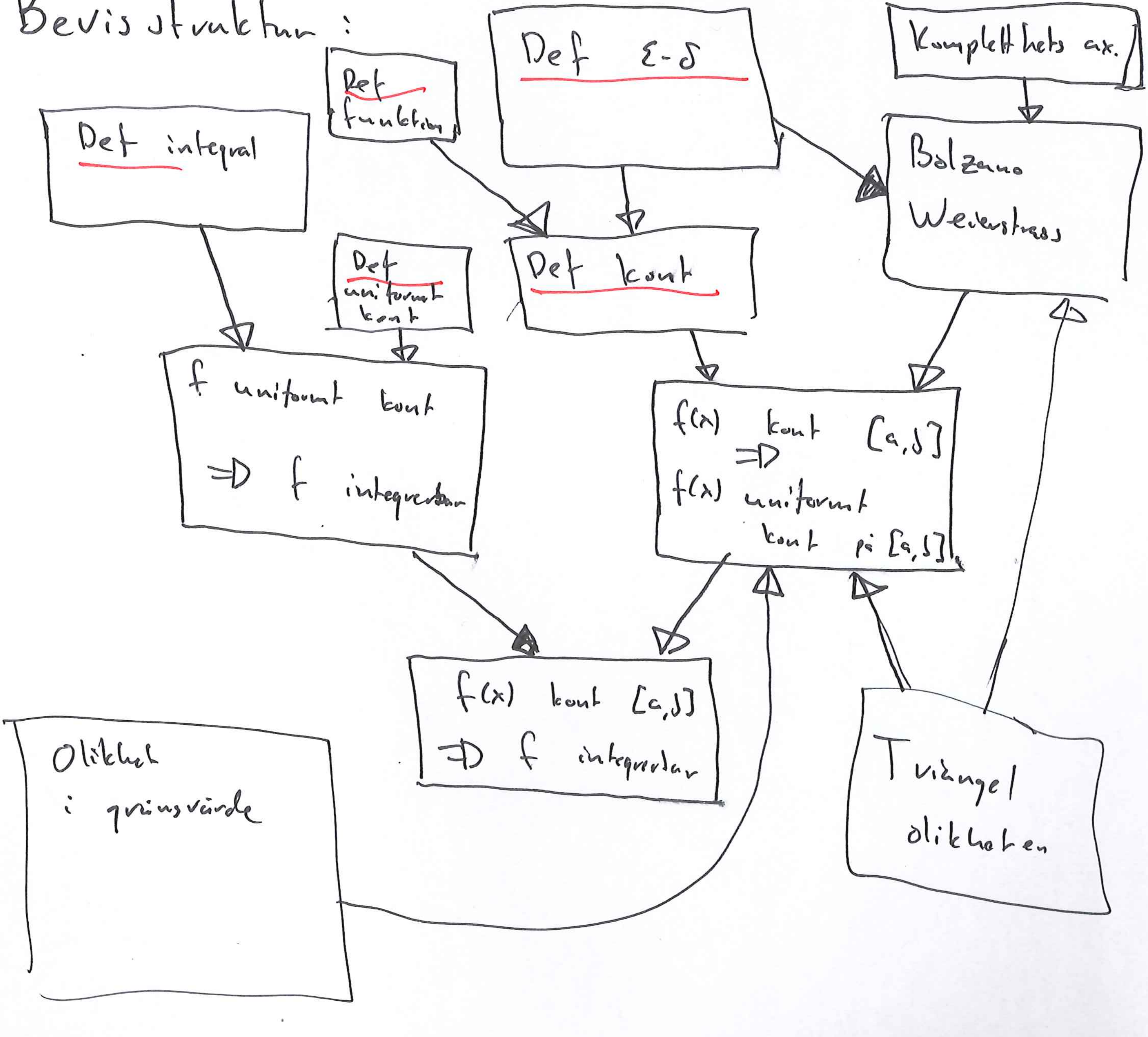
Eftersom $f(x)$ är kontinuerlig så ska

$$\lim_{j\to\infty} f(x_{k_j}) = f(x_0) = \lim_{j\to\infty} f(y_{k_j})$$

Men $\lim f(x_{k_j}) \geq \varepsilon + \lim f(y_{k_j})$,

så $f(x_0) \geq \varepsilon + f(x_0)$ vilket är en motsägelse.

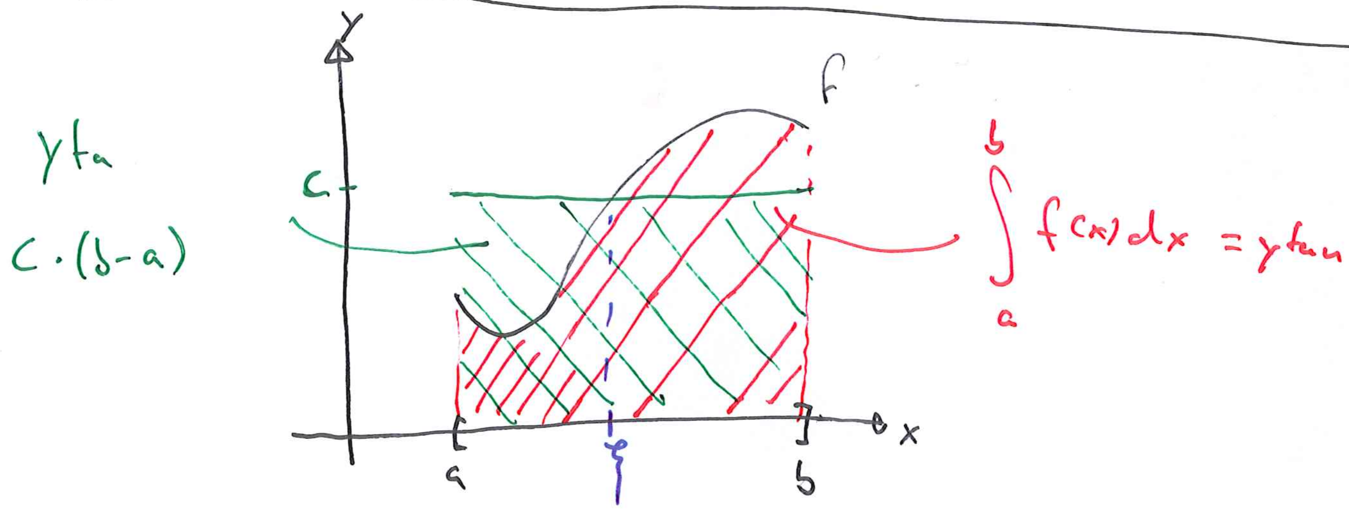
Bevisstruktur:



Integralkalkylens medelvärdessats

Sats: Om f är kontinuerlig på $[a,b]$ så finns det en punkt $\xi \in [a,b]$ så att

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi)$$



Välj c så att $c\,(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$

Bevis: Låt $m = \inf_{a\le x\le b} f(x)$ existerar då f är kont (sats 3 sid 507)

$M = \max_{a\le x\le b} f(x)$ — " " ———

då

$$m\cdot(b-a) = \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx = M\,(b-a)$$

Så

$$m \le \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{definiera detta till } c.} \le M. \qquad (1)$$

Så $\min\limits_{a\le x\le b} f(x) \le m \le c \le M = \max\limits_{a\le x\le b} f(x)$

så det finns, enl. satsen om mellanliggande värden, ett ξ så $f(\xi)=c$.

Så, enl. (1), $f(\xi) = c = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

$$\Rightarrow (b-a)\,f(\xi) = \int_a^b f(x)\,dx$$

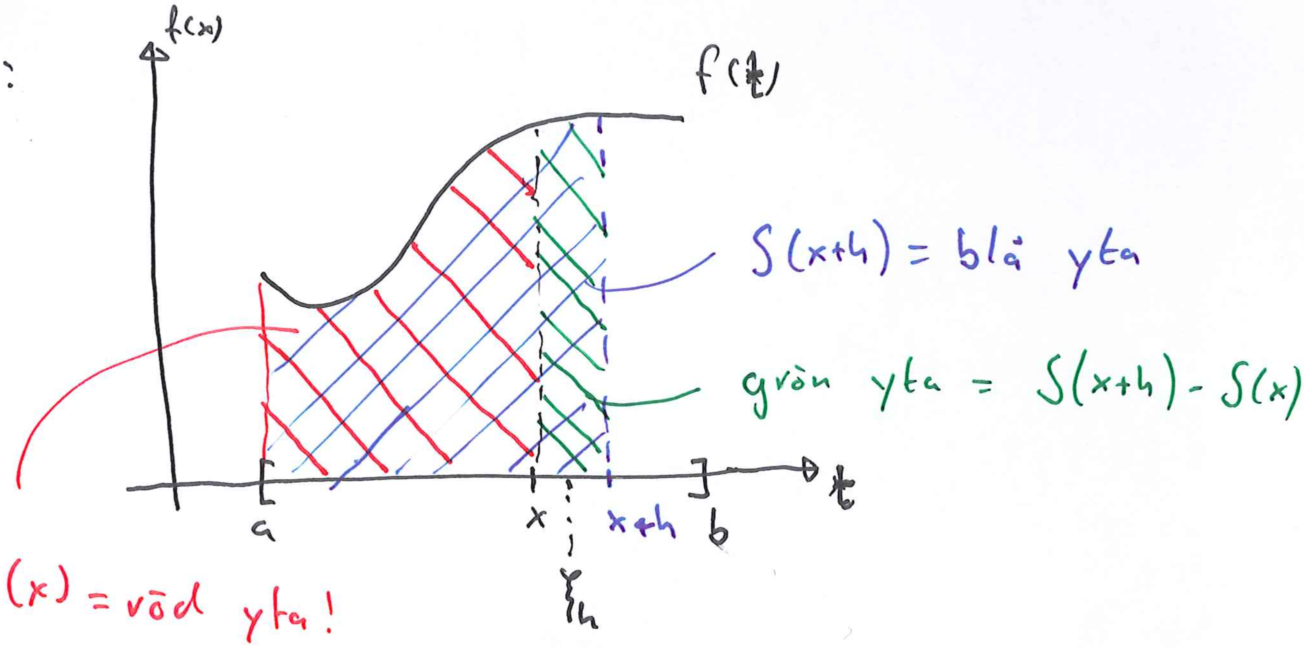
∎

Sats [Analysens huvudsats]. Låt f vara kontinuerlig på $[a,b]$. Sätt

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Då $S'(x) = f(x)$. ($S(x)$ är primitiv till f).

Bevis:



Enligt def av derivata så är

$$S'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^{x} f(t)\,dt \right) \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x)\,dx \right] = \left\{ \begin{array}{l} \text{enl. medel-} \\ \text{värdessatsen} \\ \text{så finns} \\ \text{det } \xi_h \in [x, x+h] \\ \text{så att ..} \end{array} \right\} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{1}{h} \cancel{(x+h-x)} f(\xi_h) \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} f(\xi_h) = f(x)$$

Där sista likheten gäller eftersom $|x - \xi_h| \leq h$

~~X~~ så $\xi_h \to x$ då $h \to 0$ och därför

så följer det av f's kontinuitet att

$$\lim_{h \to 0} f(\xi_h) = f(x)$$

$\blacksquare$

1 För vilka kontinuerliga funktioner $f(x)$ gäller

$$\left| \int_{-3}^{4} f(x)\,dx \right| = \int_{-3}^{4} |f(x)|\,dx \text{ ?}$$

2/ Antag att $f(1) = 1$ och

$$\int_1^5 f'(x)\,dx = 2.$$

Vad är $f(5)$?

8) Om $f(x)$ är kont. så

$$D\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Låt $$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{om } x<0 \\ 0 & \text{om } x=0 \\ 1 & \text{om } x>0 \end{cases}$$

och $$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,dt.$$

För vilka x är $F'(x)$ definierad.

Är höger derivatan

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

resp vänster derivatan

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$ definierade.

Om

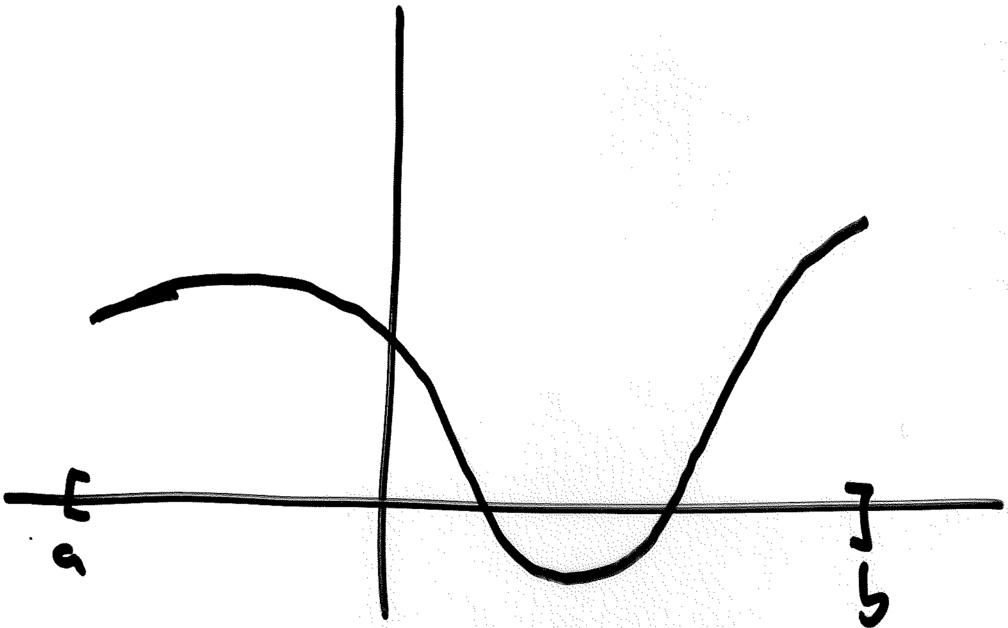
$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{för } x \neq 0 \\ 1 & \text{för } x = 0 \end{cases}$$

kommer då

$$f'(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{för } x \neq 0 \\ 1 & \text{för } x = 0 \end{cases} \quad ?$$

4) Låt $S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

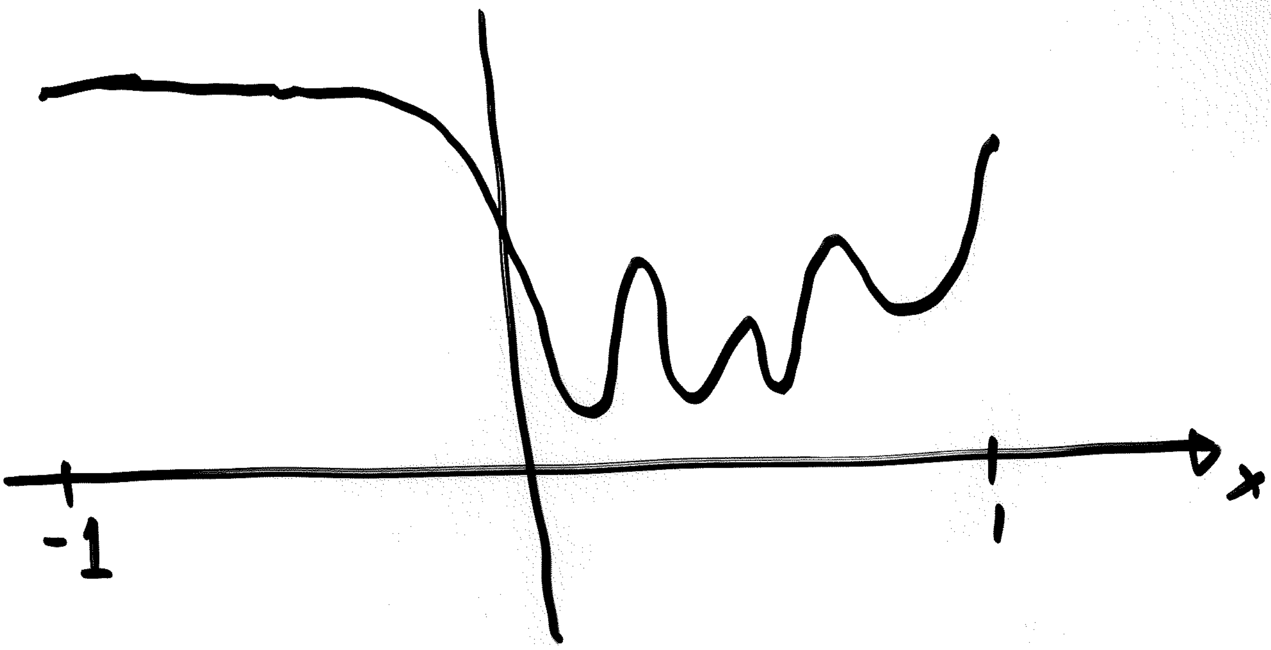
då $f(x)$ har följande graf



Rita grafen till $S(x)$,

och grafen till $f'(x)$

5) Låt grafen till $f(x)$ vara



Vi vill approximera $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

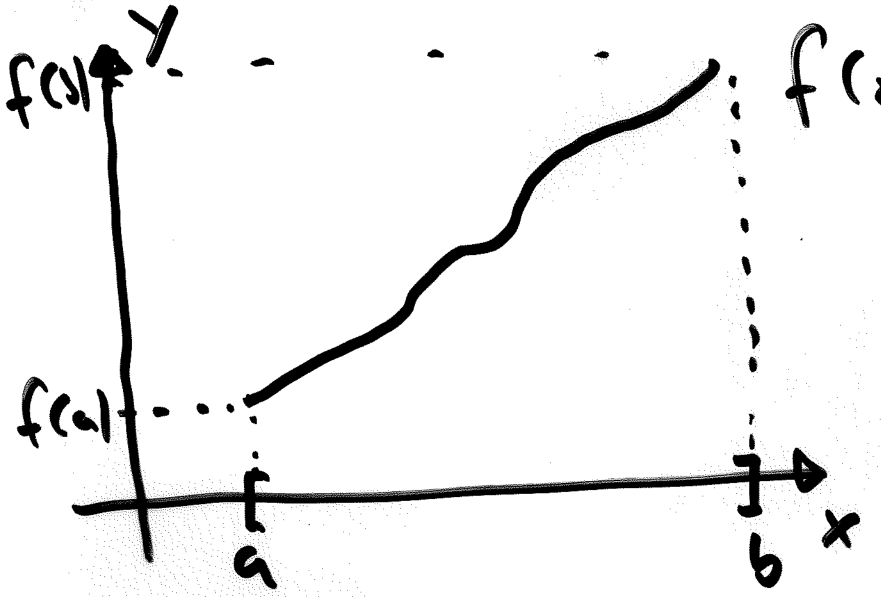
med $\int_{-1}^{1} \psi(x)\,dx$ där $\psi(x)$ är

en trappfunktion $f(x) \geq \psi(x) = a_i \quad x_{i-1} \leq x < x_i$

Om vi vill få en så bra approximation som möjligt med 10 punkter x_i ska vi välja fler x_i till höger eller till vänster om y-axeln

6) Låt grafen av $f(x)$

ges av



Kan man tolka

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\,dx$$

geometriskt i grafen