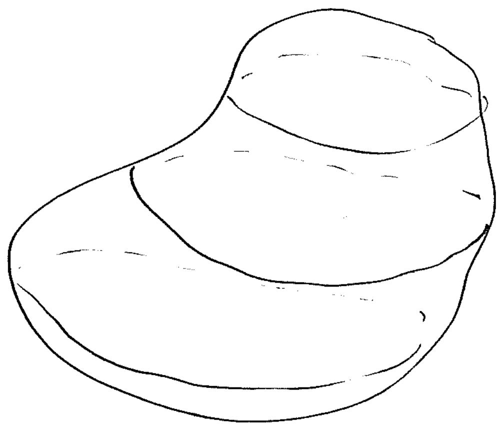
Tillämpningar av integralen.

1) Vad är volymen av:



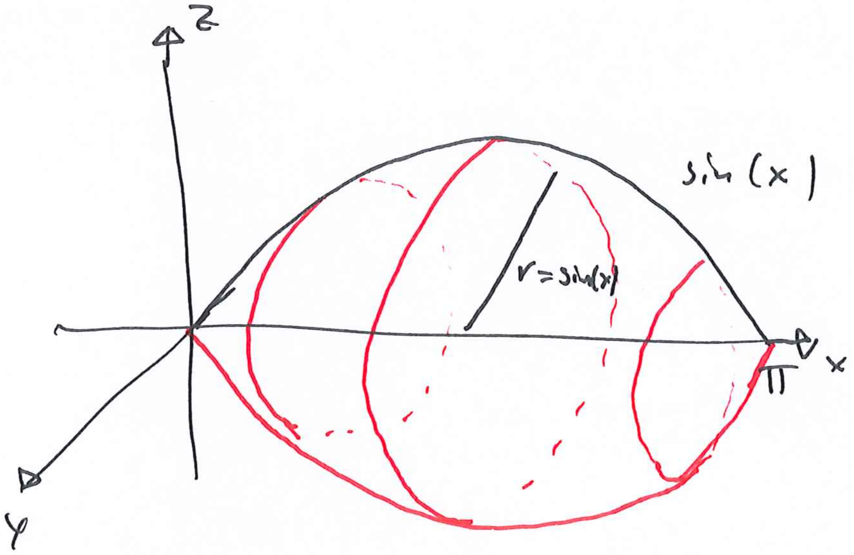
Frågan är odefinierad (matematiskt). Vi måste

i) Specificera vad vi menar med volym (Definiera volym)

ii) Vi måste beskriva kroppen matematiskt.

Vi kommer bara att göra det i enklare fall idag. Mer allmänt kommer dessa problem att hanteras av flervariabel analysen.

Ett av de enklaste fallen är då vi har symmetri. Så låt oss titta på kroppen K



(Amerikansk fotboll)

$$K = \left\{ (x, y, z) ;\ 0 \le x \le \pi ,\ \sqrt{y^2 + z^2} \le |\sin(x)| \right\}$$

Definition: Låt $f(x)$ vara en funktion på $[a, b]$. Vi säger att

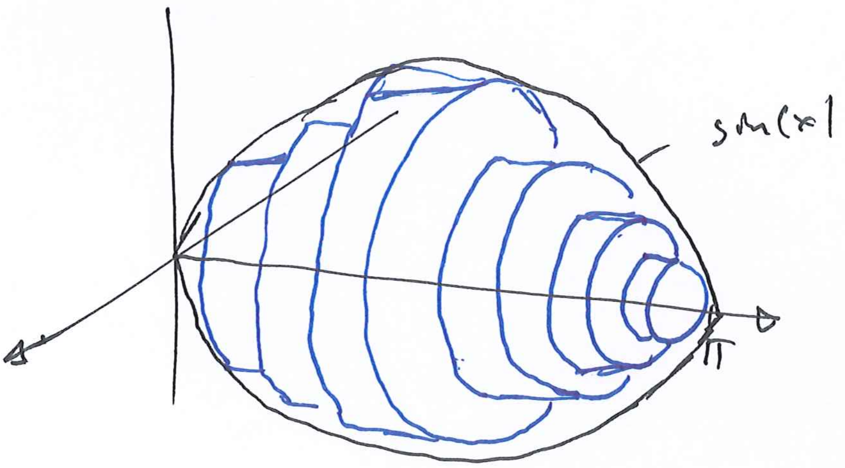
$$K = \left\{ (x, y, z) ; a \le x \le b ,\ \sqrt{y^2 + z^2} \le |f(x)| \right\}$$

är rotations kroppen som fås då arean mellan f och x-axeln roteras ett varv kring x-axeln

Eller ~~när~~ K är rotationskroppen av f på $[a, b]$.

Vad är volymen?

Vi approximerar genom att dela in



x-axeln

i .. ~~x_0~~

$0 = x_0 < x_1 .. < x_k < .. x_n = \pi$

och låter

a_k vara mindre

än $|f(x)|^2 \left(= |\sin(x)|\right)$

på $]x_{k-1}, x_k[$.

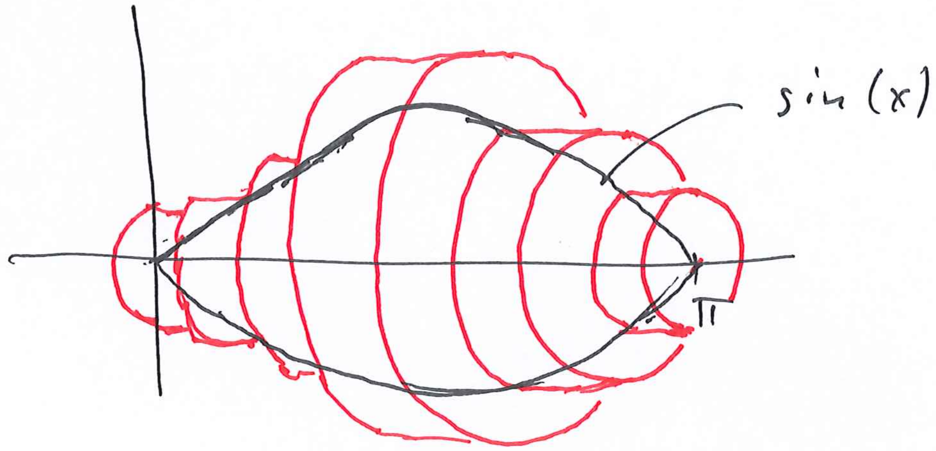
Då (enligt vår intuition, vi har ännu inte definierat volym) så borde volymen i K vara mindre än volymen av summan av de blå cylindrarna

$$Vol(cylinder) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \pi a_k (x_k - x_{k-1})}_{\text{Trapp funktion}} \geq Volym(K).$$

$I(\psi)$ då

$\psi \leq f(x)$

På samma sätt så kan vi ta cylindrarna som ligger "utanför" K



och om $b_k \geq |f(x)|^2$ så borde då

$$\text{Volym(röda cylindrar)} = \pi \underbrace{\sum_{k=1}^{n} b_k (x_k - x_{k-1})}_{I(\Theta)} \geq \text{Volym}(K)$$

då

Θ är en trappfunktion

så $\Theta(x) \geq f^2(x)$

Så vi kan skatta "volymen" ovanifrån och underifrån:

$$\pi\, I(\Theta) \geq \text{Volymen}(K) \geq \pi\, I(\Psi)$$

där $\Theta \geq f^2 \geq \Psi$ och Θ och Ψ är trappfunktioner.

Definition: Vi säger att rotationens volymen (volymen av rot kropp) av $f(x)$ på intervallet $[a,b]$ är

$$\int_a^b \pi f^2(x)\,dx$$

om ovanstående integral existerar.

Exempel: Antag att densiteten av rotationskroppen $\sin(x)$ på $[0,\pi]$ ges av $\cos(x)+2$ vad väger kroppen K.

Svar: Vikten ges av

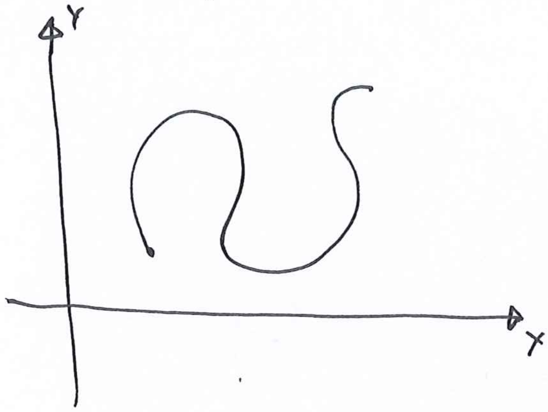
$$\underbrace{\int_0^\pi (\cos(x)+2)\sin^2(x)\,dx}_{\text{Integrerbar då } (\cos(x)+2)\sin^2(x) \text{ är kont.}} = \underbrace{\left[\frac{1}{3}\sin^3(x)\right]_{x=0}^{\pi}}_{=0} + 2\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx$$

$$= \left\{ \sin^2(x) = \frac{-\cos(2x)+1}{2} \right\} = \int_0^\pi (-\cos(2x)+1)\,dx = \left[-\frac{1}{2}\sin(2x)+x\right]_{x=0}^{\pi} =$$

$$\boxed{= \pi}$$

Kurvlängd.

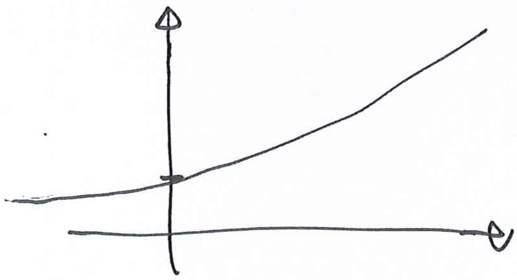
1) Hur lång är kurvan



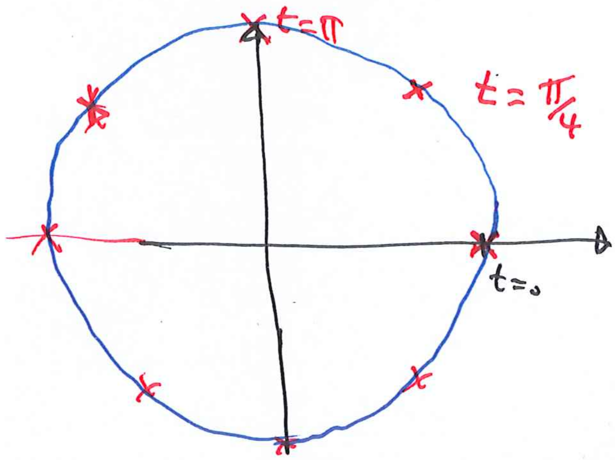
Säg att kurvan ges av $(x(t), y(t))$ $t \in [a, b]$.

Exempel:

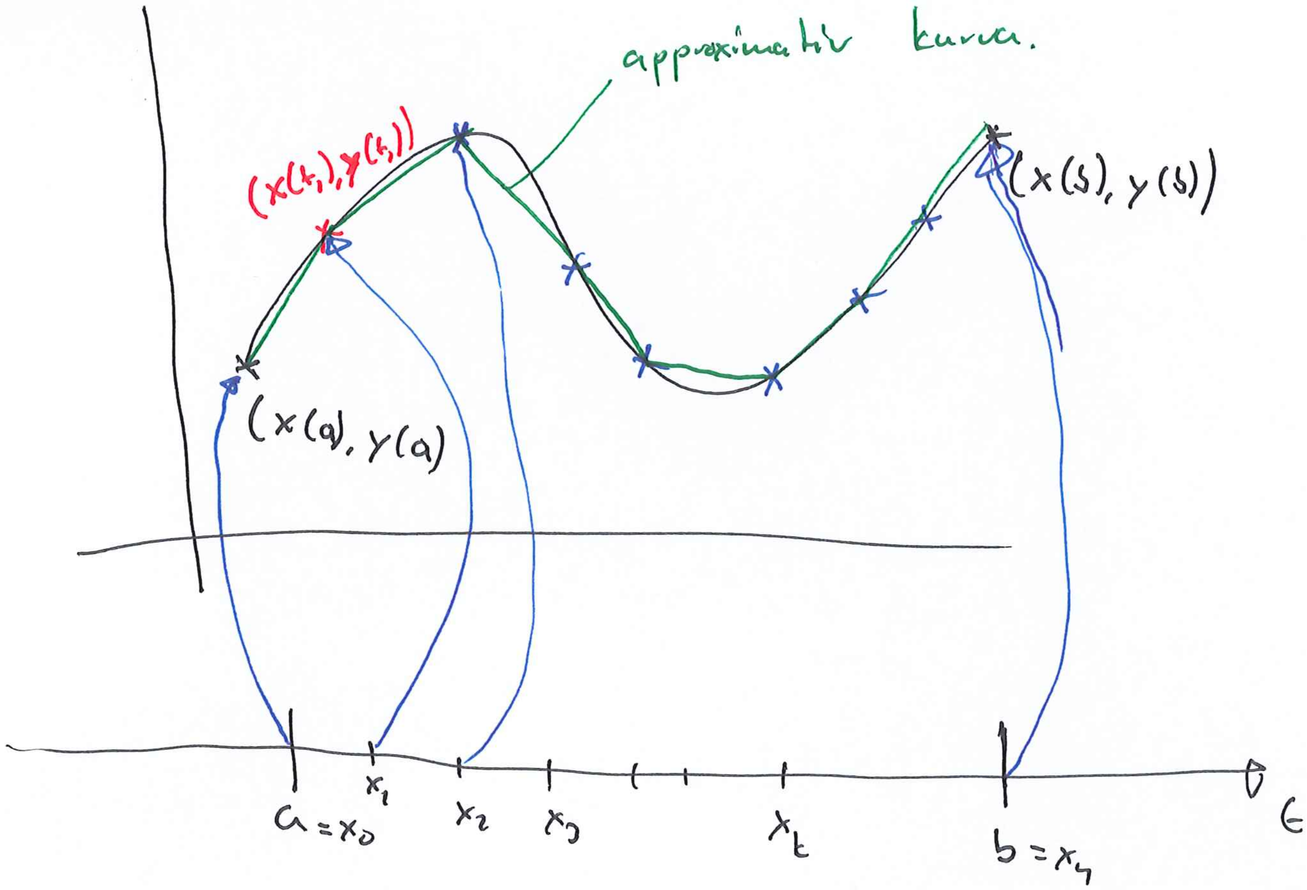
1) $x(t) = t$, $y(t) = e^t$ $\Rightarrow$ $y = e^x$



2) $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$ $\quad t \in [0, 2\pi[$



$t = \pi/4 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \; y = \frac{1}{\sqrt{2}}$



approximativ kurva.
(x(t1), y(t1))
(x(a), y(a))
(x(b), y(b))
a = x0
x1
x2
x3
xk
b = xn
t

Längden av den approximativa kurvan

mellan $(x(t_{k-1}), y(t_{k-1}))$ till $(x(t_k), y(t_k))$

kan beräknas genom Pythagoras sats

$$\sqrt{\left(x(t_k) - x(t_{k-1})\right)^2 + \left(y(t_k) - y(t_{k+1})\right)^2}$$

Så den approximativa längden är

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(x(t_k) - x(t_{k-1})\right)^2 + \left(y(t_k) - y(t_{k+1})\right)^2} = \left\{\begin{array}{l}\text{antag } x(t) \\ \text{och } y(t) \\ \text{deriverbara} \\ \text{och diff kalkeus} \\ \text{huvudsats}\end{array}\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(t_k - t_{k-1})^2 \underbrace{\left(x'(\xi_k)\right)^2}_{\xi_k \text{ mellan } t_{k-1} \text{ och } t_k} + (t_k - t_{k-1})^2 \underbrace{\left(\cancel{y}'(\eta_k)\right)^2}_{\eta_k \text{ mellan } t_{k-1} \text{ och } t_k}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |t_k - t_{k-1}| \sqrt{\left(x'(\xi_k)\right)^2 + \left(y'(\eta_k)\right)^2} \leq I(\theta)$$

om $\theta(t)$ är en trappfunktion. $\theta(t) = b_k \quad t_{k-1} < t < t_k$

och $\theta(t) \geq \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$

Definition: Om kurvan $\Gamma = \{(x(t), y(t)) ; \ t \in [a,b]\}$ och $x(t)$, $y(t)$ är kont. deriverbara på $[a,b]$ så säger vi att längden av Γ är

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt.$$

~~Tillhör inte kursen efter detta.~~

~~Definitio~~

Kommentarer:

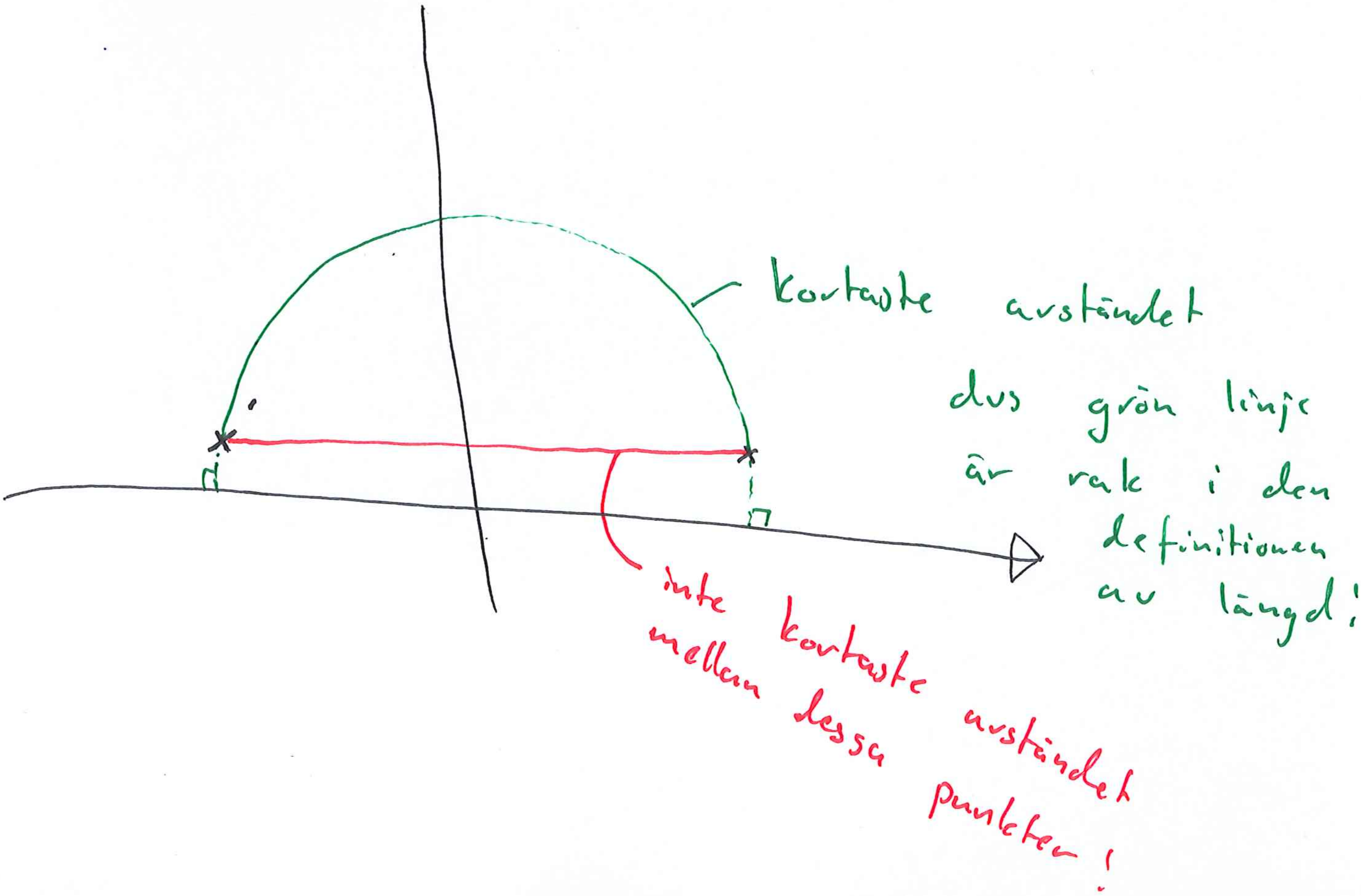
1) Observera att när vi talar om längden av kurvor så är vi på osäkrare mark. Intuitivt så har vi en bra definition men, till skillnad från volymer så, kan vi inte skatta längden ovanifrån så vi kan inte "stänga in" längden i ett ε-intervall.

Resten av den här föreläsningen ingår inte i kursen.

Definition: Låt Γ vara en kurva $(x(t), y(t))$ $t \in [a,b]$ så att $y(t) > 0$. $(x(t), y(t))$ kont. deriverbar. Då säger vi att längden av Γ är

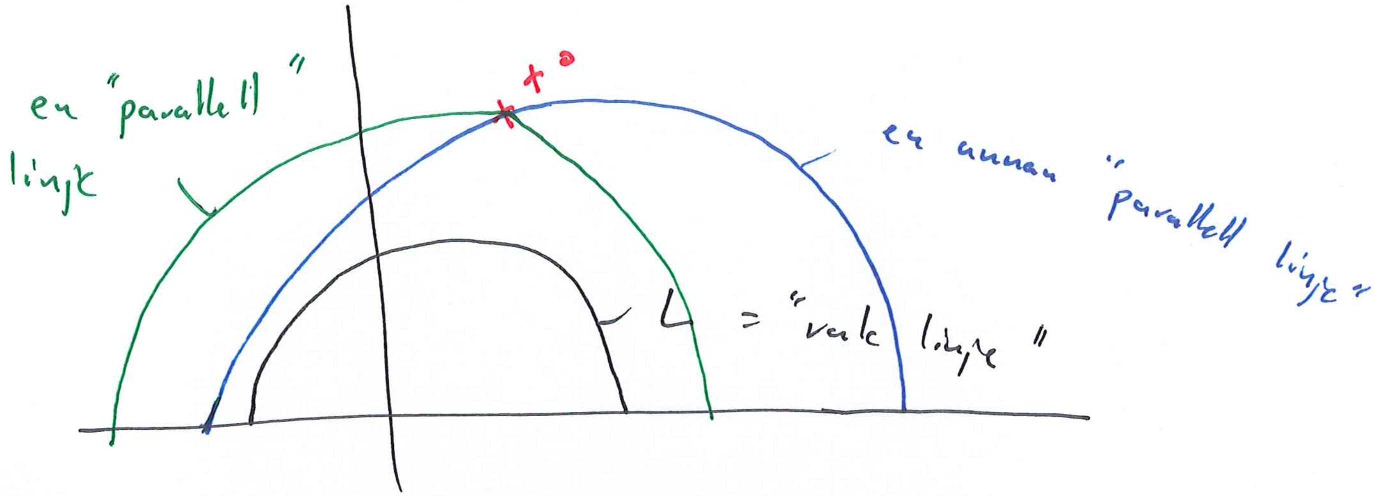
$$\int_a^b \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt}{y(t)}.$$

Det är inget fel med den här formeln vi får definiera längd som vi vill.



Inte en Euklidisk geometri, dvs

för varje rak L linje och punkt $x^0 \notin L$
så finns det mer än en parallell linje
genom x^0



Detta är väldigt viktigt för
fysiken då Einsteins universum också har
ett annat sätt att mäta avstånd än
Euklides.