Integraler / Diffekvationer.

Förra veckan så började vi titta på differentialekv.

$$y'(x) = h(x) \implies y(x) = \int h(x)\,dx.$$

Observera att vi endast kan "invertera" dessa väldigt enkla differentialekvationer.

Även för förhållandevis enkla ekvationer som

$$y' + y = 1 \implies y' = 1 - y \implies y = \underbrace{\int 1 - y(x)\,dx}$$

måste veta vad $y(x)$ är för att kunna beräkna den här.

Så måste vi vara smartare. Vi introducerade därför ~~integr~~

Integrerande faktorer

Observera att om $y' + g(x)y = h(x)$ och $G(x) = \int g(x)\,dx$ så

$$\underbrace{D\left(e^{G(x)}y(x)\right)}_{\text{på den enkla formen } D(f(x)) \text{ som vi kan integrera.}} = e^{G(x)}y'(x) + e^{G(x)}g(x)\,y(x) = e^{G(x)}(y' + g(x)y) = e^{G(x)}h(x)$$

Produkt och kedjeregeln

$$\implies \cancel{e^{G(x)}}\,y(x) = \left(\int e^{G(x)}h(x)\,dx + C\right)e^{-G(x)}.$$

Så vi använder produktregeln för att skriva om $y' + g(x) = h(x)$ till den enkla formen vi kan integrera. [Vi använder även kedjeregeln, men jag känner att den viktiga ideen är att vi kan skriva $g(x)$ som en derivata.]

Produktregeln för derivator

$$D(f(x)g(x)) = fg' + f'g$$

$\Longleftrightarrow$

Partiell integration

$$\int D(fg) = fg = \int f'g + g'f$$

Samma idee

Produkt regeln för gränsvärden

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0)$$

Linjära första ordningens DE

$$y' + gy = h \iff y = e^{-G}\left(\int e^{G} h\,dx + C\right)$$

Verifiering av integrerande faktor formeln, g & h kont.

Om $y = e^{-G(x)}\left(\int e^{G(x)} h(x)\,dx + C\right)$ så

$$Dy = \left\{\begin{matrix}\text{produkt}\\ \text{regeln}\end{matrix}\right\} = \left(\int e^{G(x)} h(x)\,dx + C\right) D e^{-G(x)} + e^{-G(x)} D\left(\int e^{G(x)} h(x)\,dx\right)$$

$$= -g(x)\underbrace{\left(\int e^{G(x)} h(x)\,dx + C\right)e^{-G(x)}}_{y(x)} + \cancel{e^{-G(x)}}\,\cancel{e^{G(x)}}\,h(x) = -g(x)y + h$$

$$\Rightarrow y' + g(x)y = h(x).$$

Kedjeregeln och Diff ekvationer

När vi integrerade så lärde vi oss att

$$\boxed{D\left(f(g(x))\right) = g'(x)\, f'(g(x))}$$

Kedjeregeln

$$\cancel{F(y) = \int f(y)\, y'(x)\, dx}$$

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \left[\int f(g(t))\, g'(t)\, dt\right]_{t=g^{-1}(x)}}$$

Sammansättning av gränsvärden
$f \to A$ då $x \to B$
$g \to B$ då $x \to x_0$
$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = A$

Diff ekvation?

Vi borde få en diff ekvation som vi kan lösa från detta.

Så om vi skriver kedjeregeln med $y(x)$ så får vi

$$D\left(F(y(x))\right) = f(y)\, y'(x) \quad \text{där} \quad F(t) = \int f(t)\,dt$$

Så om vi har en ODE på formen

$$f(y)\, y'(x) = h(x)$$

så är lösningen given av

$$D\left(F(y(x))\right) = h(x) \implies F(y(x)) = \int h(x)\,dx + C$$

$$\implies y(x) = F^{-1}\left(\int h(x)\,dx + C\right).$$

~~Sats~~ Definition: En Diff ekvation på formen

$$f(y)\,y'(x) = h(x)$$ kallar vi separabel.

Remark: Separabel eftersom vi kan separera alla y till ena sidan och alla x till den andra. Observera att inte alla diff ekvationer som kan skrivas med alla y i VL och alla x i HL är separabla t.ex.

$$y' + y = x^2$$ är

inte separabel.

Sats: Om $f(x), h(x)$ är kontinuerliga och

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$ är inverterbar

(t.ex. om $f(x) > 0$ eftersom strikt växande funktioner är inverterbara) så kommer

$$y(x) = F^{-1}\left(\int h(x)\,dx + C\right)$$ att lösa

$$f(y)\,y'(x) = h(x).$$

Exempel. Lös $x^2 y \frac{dy}{dx} = 2 + x^3$

$$y(2) = -1$$

~~Vad är den största definitionsmängden för lösningen~~

Svar: För $x = 0$ så kan vi skriva ekv. som

$$D\left(y^2(x)\right) = \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x} \implies$$

$$\implies y^2(x) = \int \left(\frac{4}{x^2} + \frac{2}{x}\right) dx + C =$$

$$= -\frac{4}{x} + 2\ln|x| + C$$

$$\implies y(x) = \pm\sqrt{2\ln|x| - \frac{4}{x} + C}$$ om $2\ln|x| - \frac{4}{x} + C \geq 0$

~~är ≥ 0~~

$$y(2) = \pm\sqrt{2\ln|2| - 2 + C} = -1$$

dvs $C = 3 - 2\ln 2$ och

$$y(x) = -\sqrt{2\ln\frac{x}{2} - \frac{4}{x} + 3}$$ vilken är

definierad då $2\ln\frac{|x|}{2} - \frac{4}{x} + 3 \geq 0$

Integral ekvationer.

Vi kan lösa (vissa) ekvationen $y'(x) = f(x,y)$.
Och kan vi göra något för en derivata
så borde vi kunna göra något för integralen
så korresponderande till en differential ekvation
så borde vi ha en integral ekvation

$$y(x) = f(x) + \int_a^x g(t, y(t))\,dt \qquad (1)$$

Men vi har en sats som avgör
relationen mellan integralen och derivatan

$$D\int_a^x g(t, y(t))\,dt = g(x, y(x))$$ så vi kan
derivera (1) och härleda

$$y'(x) = f'(x) + g(x, y(x)) \qquad (2)$$ Diff ekvation.

och

$$y(a) = f(a) + \int_a^a g(t, x(t))\,dx = f(a).$$

Så om (2) är på ~~formen~~ en form av
diff ekvation som vi kan lösa så kan vi lösa 1.

Remark: Om $f' = 0$ och $g(x,y) = f(y)\,h(x)$
så får vi en separabel diff ekv som
vi kan lösa.

Om $g(x,y) = y \cdot h(x)$ så får vi
en linjär första ordningens vilken vi kan lösa

Exempel. Bestäm ett $y(x)$ så att

$$y(x) = 4 + \int_0^x (1 + y^2(t))\,dt. \qquad (1)$$

Svar: Vi deriverar (1) m.a.p x och använder analysens huvudsats

$$y' = 1 + y^2(x) \implies \underbrace{\frac{1}{1+y^2(x)}\,y'(x) = 1}_{\text{Separabel.}}$$

Så

$$D\big(\arctan(y(x))\big) = 1 \implies \arctan(y(x)) = x + C$$

då $-\frac{\pi}{2} < x + c < \frac{\pi}{2}$.

$$\implies y(x) = \tan(x + c)$$

men

$$y(0) = 4 + \int_0^0 (1 + y^2(t))\,dt = 4$$

så

$$\tan(c) = 4 \implies c = \arctan(4)$$

$$y(x) = \tan(x + \arctan(4))$$

då $-\frac{\pi}{2} - \arctan(4) < x < \frac{\pi}{2} - \arctan(4)$