Andra ordningens linjära Diff ekvationer.

~~Problem~~: $y'' + ay' + by = h(x)$, $y(x_0) = c$ $y'(x_0) = d$

a & b ~~kself~~ konstanter

Plan. i) Hitta alla homogena lösningar

$$y_h'' + ay_h' + by_h = 0$$

ii) Hitta en partikulärlösning

$$y_p'' + ay_p' + by_p = 0$$

iii) Välj homogen lösning så att

$y = y_h + y_p$ löser $y(x_0) = c$ $y'(x_0) = d$

Steg 1. Homogena lösningen

i) Hitta $\overbrace{\text{rötterna}}^{\alpha,\beta}$ till det karakteristiska polynomet $p(r) = r^2 + ar + b$

ii) ⊛ Om $\alpha \neq \beta$ och båda reella så är

$$y_h = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x}$$

⊛ Om $\alpha = \beta$ så är

$$y_h = Ae^{\alpha x} + Bxe^{\alpha x}$$

⊛ Om α och β är komplexa så är $\overline{\beta} = \alpha = u + iv$ och

$$y_h = Ae^{ux}\sin(vx) + Be^{ux}\cos(vx).$$

Vi får två konstanter A, B som vi kan välja för att lösa $y(x_0) = c$ och $y'(x_0) = d$.

Vi kan inte lösa det här problemet i allmänhet men för speciella $h(x)$ så kan vi hitta en partikulärlösning.

I) $h(x) = \{\text{polynom av grad } n\} = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots d_n x^n$

$\Rightarrow$ ansätt $y_p = \{\text{polynom av grad } n\} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n$

Då kommer $y'' + ay' + by =$

$$= 0 + 0 + 2c_2 + 6c_3 x + 12 c_4 x^2 + \dots + n(n-1) c_n x^{n-2}$$
$$+ a(0 + c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \dots + n c_n x^{n-1})$$
$$+ b(c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n) =$$

$$= d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots + d_n x^n$$

$\Rightarrow$ {Jämför termer av samma ordning} $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} d_0 &= 2c_2 + ac_1 + b c_0 \\ d_1 &= 6c_3 + 2ac_2 + c_1 \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ d_n &= ac_n + 0 + 0 \end{aligned}\right\} (6)$$

Lös (6) med linjär algebra för att beräkna $c_0, c_1, c_2 \dots c_n$

II) $h(x) = \text{polynom} \cdot e^{\gamma x} = (d_0 + d_1 x + \ldots + d_n x^n) e^{\gamma x}$

ansätt $y_p = (c_0 + c_1 x + \ldots c_n x^n) e^{\gamma x}$

III) $h(x) = \text{polynom} \times \sin \gamma x = \text{im}(e^{i\gamma x}) \times \text{poly}$

$\text{polynom} \times \cos \gamma x = \text{re}(e^{i\gamma x}) \times \text{poly}$

$y_p(x) = (\text{polynom}) \times \sin(x) + (\text{polynom}) \times \cos(x)$

eller så löser vi hjälp ekvationen

$$y'' + ay' + by = (d_0 + d_1 x + \ldots + d_n x^n) e^{i\gamma x}$$

och tittar på real eller imaginärdelen till lösningen.

IV) Är man osäker så kan man göra en ansats att lösningen har formen $z(x)w(x)$ där $w(x)$ är högerledet.

Exempel. Lös
$$y'' - 1y' - 2y = \sin(3x)$$
$$y(0) = 0$$
$$y'(0) = \frac{1}{10}$$

Svar: Karakteristiska polynomet är

$r^2 - 1r - 2$ som har rötterna

$$\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

så den homogena lösningen är

$$y_h = Ae^{-x} + Be^{2x}$$ för några konstanter A, B.

Vi behöver hitta en partikulärlösning y_p.

Vi gissar $y_p = C\sin(3x) + D\cos(3x)$ och beräknar

$$y_p'' = -9C\sin(3x) - 9D\cos(3x)$$
$$y_p' = 3C\cos(3x) - 3D\sin(3x)$$ så

$$y_p'' - y_p' - 2y = (-9C - 2C + 3D)\sin(3x) + (-9D - 3C - 2D)\cos(3x)$$

$$\left.\begin{array}{l} -11C + 3D = 1 \\ -11D - 3C = 0 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} D = \frac{3}{130} \\ C = -\frac{11}{130} \end{array}\right\} \Rightarrow y_p = -\frac{11}{130}\sin(3x) + \frac{3}{130}\cos(3x)$$

$$y(0) = A + B + \frac{3}{130} = 0 \quad \Rightarrow \quad -A = B + \frac{3}{130}$$

$$y'(0) = -A + 2B - \frac{11}{130} = \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad 3B - \frac{8}{130} = \frac{13}{130}$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{7}{130}.$$

$$\Rightarrow \quad A = -\frac{3}{130} - \frac{7}{130} = -\frac{1}{13}$$

Så

$$y = y_h + y_p = -\frac{1}{13} e^{-x} + \frac{7}{130} e^{2x} - \frac{11}{130} \sin(3x) + \frac{3}{130} \cos(3x).$$

Exempel: $y'' + y = x e^x \sin(x)$

$y(0) = \_\_\_$

$y'(0) = \_\_\_$

Svar: Vi hittar först homogena lösningen.

Det karakteristiska polynomet är r^2+1 som har ~~lösningarna~~ rötterna $\pm i$. Den homogena lösningen är därför $Ae^{ix} + Be^{-ix}$.

För att hitta partikulärlösningen använder vi $x e^x \sin(x) = \operatorname{Im}(x e^{(1+i)x})$. Vi gör därför ansättningen att $y_p = z(x) e^{(1+i)x}$

$$y_p'' = 2(1+i) z'(x) e^{(1+i)x} + z'' e^{(1+i)x} + (1+i)^2 z(x) e^{(1+i)x}$$

Så

$$y_p'' + y_p = \underbrace{\left([1+2i] z(x) + 2(1+i) z'(x) + z''(x)\right)}_{=x} e^{(1+i)x}$$

Så om vi sätter $HL = x e^{(1+i)x}$ och tar imaginärdelen så skulle vi få en lösning.

Så vi behöver lösa

$$[1+2i] z + 2(1+i) z' + z'' = x$$

ansätt $z = a + bx \Rightarrow \underbrace{[1+2i] b}_{=1} x + \underbrace{a[1+2i] + 2(1+i) b}_{=0} = x$

$$b = \frac{1}{1+2i} = \frac{1-2i}{5}$$

$$a = -\frac{1}{1+2i}\left[2\,(1+i)\,b\right] = \frac{2(1-2i)^2(1+i)}{25} =$$

$$= -\frac{2(1-4i-4)(1+i)}{25} = -\frac{2(-3-3i-4i+4)}{25} = -\frac{2-7i}{25}$$

Så $\operatorname{Im}(y_p) = \operatorname{Im}\left[\left(-\frac{2-7i}{25} + \frac{1-2i}{5}x\right)e^{(1+i)x}\right] =$

$$= \operatorname{Im}\left[\left(-\frac{2-7i}{25} + \frac{1-2i}{5}x\right)\left(\cos(x) + i\sin(x)\right)e^{x}\right] =$$

$$= \operatorname{Im}\left[\left[-\frac{2}{25}\sin(x) + \frac{7}{25}\cos(x) + \frac{x}{5}\sin(x) - \frac{2x}{5}\cos(x)\right]i\,e^{x}\right.$$

$$\left. + \left[-\frac{2}{25}\cos(x) - \frac{7}{25}\sin(x) + \frac{x}{5}\cos(x) + \frac{2x}{5}\sin(x)\right]e^{x}\right]$$

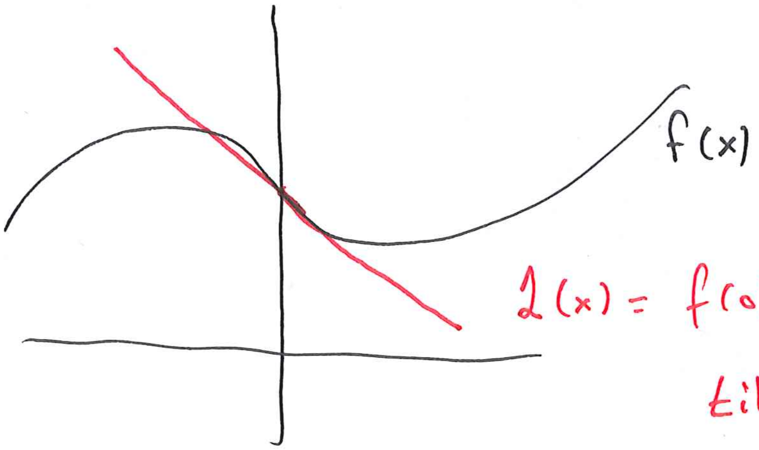
$$= \left[\frac{-2+5x}{25}\sin(X) + \frac{-7+10x}{25}\cos(x)\right]e^{x}$$

Så lösningen är

$$Y = \cancel{Ae^{2x}+Be}\; A\sin(x) + B\cos(x) + \left[\frac{-2+5x}{25}\sin(x) + \frac{-7+10x}{25}\cos(x)\right]e^{x}$$

Maclaurin serier och Taylor serier.

1/ Om $f(x)$ är en kontinuerligt deriverbar funktion. Då kan vi approximera $f(x)$ nära $x \approx 0$ med dess tangent



$l(x) = f(0) + f'(0)x$ tangenten till $f(x)$ i punkten $x = 0$.

Vad gör tangenten till en bra approximation?

Vi väljer tangenten så att $l(0) = f(0)$
och $l'(0) = f'(0)$.

Så om vi vill ha en bättre approximation så kan vi välja ett andragrads polynom

$$p(x) = \underbrace{\underbrace{f(0)}_{\text{gör att } p(0)=f(0)} + \underbrace{f'(0)x}_{p'(0)=f'(0)}}_{\text{tangenten}} + ax^2$$

Vi vill välja a så att

$p''(0) = 2a = f''(0)$, dvs $a = \frac{f''(0)}{2}$. (om f två gånger deriverbar)

Mer generellt så kan vi välja ett polynom av grad n så att

$$\frac{d^k p(x)}{dx^k} = \frac{d f(x)}{dx^k} \quad \text{för } x=0 \text{ och } k=0,1,2,\dots,n.$$

Vad ska koefficienterna i

$$p(x) = \underbrace{a_0}_{f(0)} + \underbrace{a_1}_{f'(0)} x + \underbrace{a_2}_{\frac{f''(0)}{2}} x^2 + \underbrace{a_3}_{\frac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}} x^3 \dots + \underbrace{a_n}_{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}} x^n$$

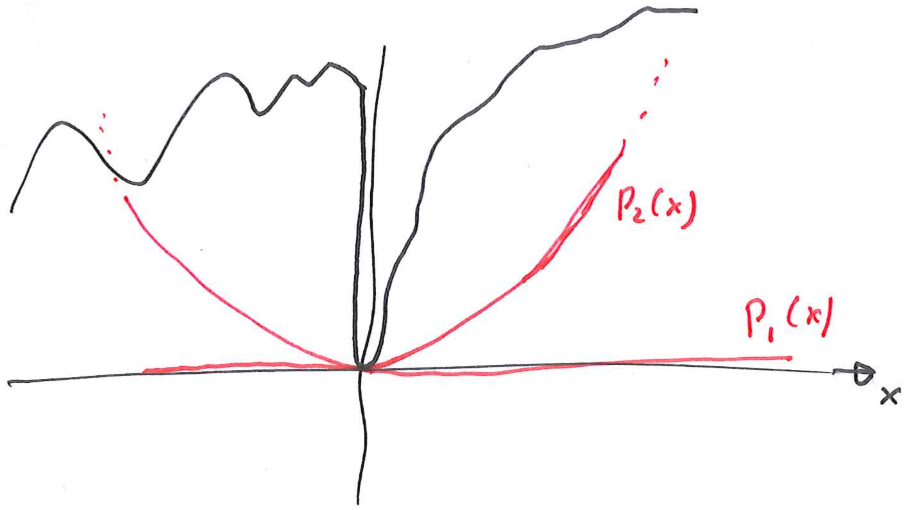
vara

Definition: Om $f(x)$ är n gånger ~~kontinuerligt~~ deriverbar i $x=0$ så säger vi att

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

är Maclaurinpolynomet av ordning n till $f(x)$.

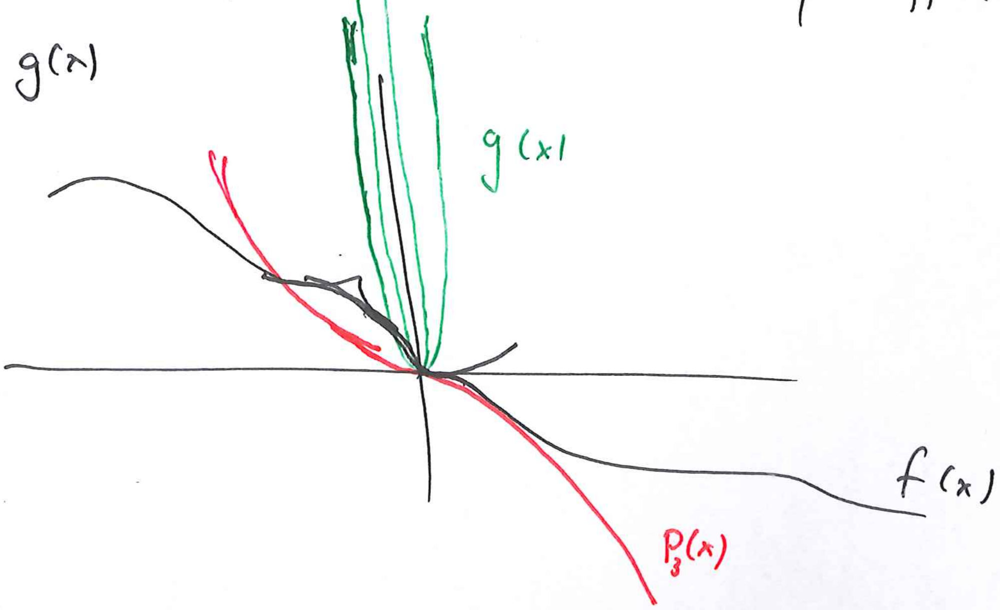
Räcker detta? Är $p(x)$ en bra approximation till $f(x)$?



Inte särskilt bra?
Eller hur?

Problemet är att om $p_n(x)$ är n:te ordningens Maclaurinpolynom till $f(x)$

så är $p_n(x)$ också n:te ordningens Maclaurin polynom till $g(x) = f(x) + Mx^{n+1}$ för varje M. Så om M är jättestor ($M >\!> 1$) så kommer $p_n(x)$ vara en dålig approximation till $g(x)$



Problemet är att för att $p_n(x)$ ska vara en bra approximation till $f(x)$ så måste vi också ha någon kontroll över $f^{(n+1)}(x)$.

~~Sats:~~ T.ex om $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq A$

så kommer

$$\left|f(x) - p_n(x)\right| \leq \frac{A|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Vi kommer (initialt) att använda en annan form av kontroll av hur bra approximationen är.

Sats: Antag att $f(x)$ och dess derivator är kontinuerliga upp till ordning $n+1$ i $]-a,b[$ för $a,b>0$. Då kommer, $x \in]-a,b[$,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta_x x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

för något θ_x (som beror på x) så att $0 \leq \theta_x \leq 1$