

Gränsvärden

Sats (l'Hospitals regel) Om f och g
är två gånger kontinuerligt deriverbara
i en omgivning av x_0 och

$$f(x_0) = g(x_0) = 0$$

då kommer
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

om $g'(x_0) \neq 0$.

~~Mer~~ Mer allmänt. Om f och g

är $n+1$ gånger kontinuerligt deriverbara

och
$$f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n+1)}(x_0) = 0$$

$$g(x_0) = g'(x_0) = g''(x_0) = \dots = g^{(n+1)}(x_0) = 0$$

$$g^{(n)}(x_0) \neq 0$$

då kommer

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

Bevis: $f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{=0} + \frac{B_f(x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

$$g(x) = g(x_0) + \dots + \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{B_g(x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

där $|B_f| \leq \max_{|y| < |x|} |f^{(n+1)}(y)|$ / $|B_g| \leq \max_{|y| < |x|} |g^{(n+1)}(y)|$

Så

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\cancel{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n} + \frac{B_f}{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{\cancel{g^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n} + \frac{B_g}{n+1}(x-x_0)^{n+1}} \rightarrow \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{g^{(n+1)}(x_0)}$$

da $x \rightarrow x_0$ enligt kvotregeln, då $g^{(n)}(x_0) \neq 0$

så närmare $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{B_g}{n+1}(x-x_0)^{n+1} = 0$

Exempel $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$

Svar: $f(0) = 0$ $f'(0) = -2 \sin(x) \cos(x) \Big|_{x=0} = 0$

$g(0) = 0$ $g'(0) = 2x \Big|_{x=0} = 0$

och $g''(0) = 2 \neq 0$. Både f & g är oändligt deriverbara så enl. l'Hospitals regel

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos^2(x) + 2 \sin^2(x)}{2} = -1$$

Koncept fråga:

Om $g(x)$ uppfyller $g(x_0) = g'(x_0) = 0$
och $g''(x) \leq 0$, kommer då

$$g(x) \geq 0 ?$$

$$g(x) \leq 0 ?$$

ingendera ?

Om $g'(0) = g''(0) = g'''(0) = 0$ och $g'''(x) \leq 0$
 ~~$g'''(0) \leq 0$~~ och $g'''(x) \leq 0$
kommer $g(x) \leq 0$?
Nej.

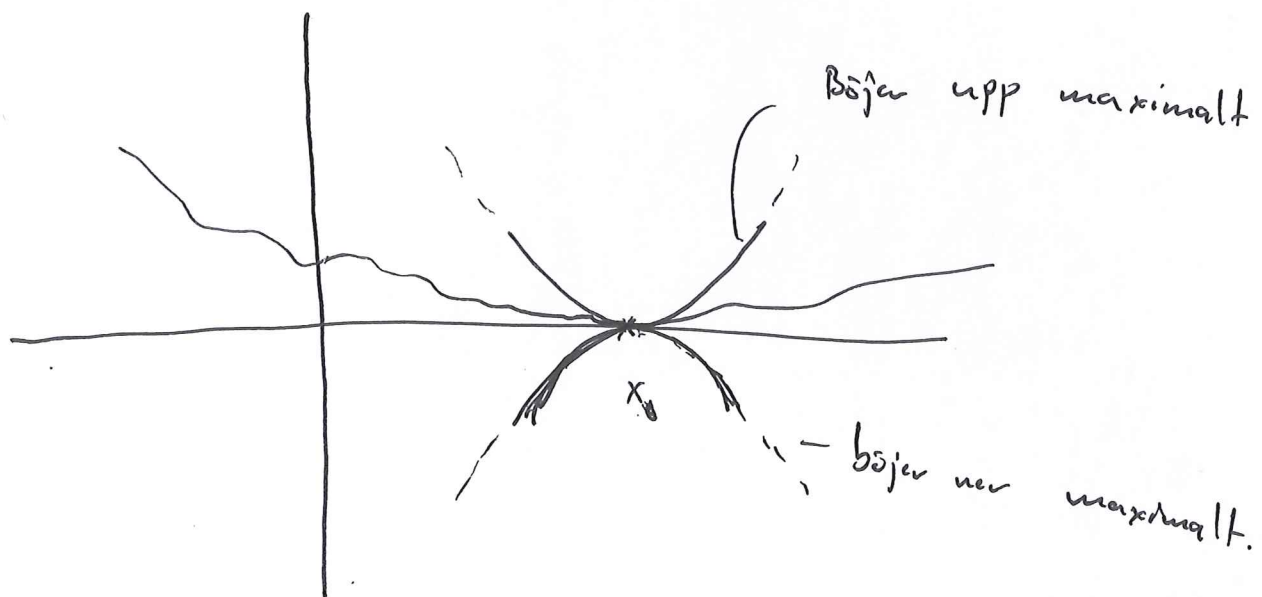
Taylorserier

Övertyga personen Svedius dig att

$$\text{Om } f(x_0) = f'(x_0) = 0$$

$$\text{och } |f''(x)| \leq M$$

$$\text{så kommer } |f(x)| \leq \frac{M}{2 \cdot 3} (x-x_0)^3$$



Så vi kan uppskatta f ovanifrån med ~~genom~~ att

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + M(x-x_0)^2$$

$$\text{eftersom } f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - M(x-x_0)^2 = g(x)$$

$$\text{är en funktion så att } g(x_0) = g'(x_0) = 0$$

$$\text{och } g''(x) \leq 0$$

Standardutvecklingar!

Som alltid när vi har en teknik så
kan vi skriva standard funktionerna.

	Standard serie,	$B_n(x)$ begränsad	$(B_n(x) \leq \frac{\sup f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!})$
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots + B_{n+1}(x)x^{n+1}$	$B_n(x) \leq \frac{e^x}{n!}$	
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + B_{n+1}(x)x^{n+1}$	$B_n(x) \leq \frac{1}{n!}$	
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$B_n(x) \leq \frac{1}{n!}$	
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + B_n(x)x^n$	$-1 < x \leq 1$	

Frågan är vad händer med rest termen

B_n när $n \rightarrow \infty$?

Om man kan bevisa att $B_n(x) \rightarrow 0$ så kan
vi skriva $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$.

✗ Vi ska inte göra bevis i detalj
men nöja oss med ett par exempel.

Sats

$$1) e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R}$$

$$2) \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R}$$

$$3) \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \text{för } -1 < x \leq 1$$

Bevis: Vi kan skriva

Rest term

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \underbrace{\frac{R(x)}{(n+1)!} x^{n+1}}$$

där $|R(x)| \leq \sup_{|y| \leq |x|} |D^{n+1} e^x| = \sup_{|y| \leq |x|} e^{|y|} = e^{|x|}$

så Rest termen är mindre än

$$\frac{e^{|x|}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

men $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$ för alla x

så

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \right| = e^{|x|} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}_{=0} = 0$$

Exempel.

9.40. Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2(x))^{-\frac{2}{x^2}}$.

Svar: $(1 + \sin^2(x))^{-\frac{2}{x^2}} = e^{-2 \frac{\ln(1 + \sin^2(x))}{x^2}}$

Vi vet att

$$\ln(1+x) = x + R_2(x)x^2$$

så

$$\ln(1 + \sin^2(x)) = \sin^2(x) + R_2(\sin^2(x)) \sin^4(x)$$

$$\sin(x) = x + R_3(x)x^3$$

så

$$\begin{aligned} \ln(1 + \sin^2(x)) &= (x + R_3 x^3)^2 + R_2 (x + R_3 x^3)^4 = \\ &= x^2 + 2x^4 R_3 + (R_3)^2 x^6 + x^4 R_2 (1 + R_3 x^3)^4 = \\ &= x^2 + (B(x))x^4 \end{aligned}$$

där $B(x) = (2R_3 + (R_3)^2 x^2 + R_2(1 + R_3 x^3)^4)$ är
begränsad så

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2(x))^{-\frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-2(1 + B(x)x^2)} = e^{-2}$$

eftersom e^x är kontinuerlig och $B(x)$ begränsad

och $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 B(x) = 0$ då $\lim_{x \rightarrow 0} |x^2 B(x)| \leq \lim_{x \rightarrow 0} |B(x)| \lim_{x \rightarrow 0} |x|^2 = 0$

Exempel.

Bestimmen

$$\int_0^{1/10} (\cos(\sin^2(x)) - 1) dx$$

mit 4 decimalen.

Skizze:

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{R_2(t)t^4}{4!}$$

$$\text{denn } |R_2(t)| \leq 1$$

$$\sin(x) = x - \frac{R_1(x)x^3}{3!}$$

$$\text{denn } |R_1(x)| \leq 1$$

Sei

$$\cos(\sin^2(x)) - 1 =$$

$$-\frac{1}{2} \left(x - \frac{R_1 x^3}{6} \right)^2 + \frac{R_2 \left(x - \frac{R_1 x^3}{6} \right)^4}{4!} =$$

$$-\frac{1}{2} x^2 + \left(-\frac{R_1 x^4}{6} - \frac{R_1^2 x^6}{36} + \frac{R_2 x^4 \left(1 + \frac{R_1 x^2}{6} \right)^4}{24} \right)$$

$\underbrace{\frac{10^{-4}}{6}}_{\leq 10^{-6}} \quad \underbrace{\frac{1}{6} 10^{-4}}_{B(x)} \quad |B(x)| \leq 10^{-4}$

$$\text{Sei} \quad \int_0^{1/10} (\cos(\sin^2(x)) - 1) dx = -\frac{1}{2} \int_0^{1/10} x^2 dx + \int_0^{1/10} B(x) dx =$$

$$= -\frac{1}{6} 10^{-3} + \int_0^{1/10} B(x) dx$$

$$\text{Sei} \quad \int_0^{1/10} (\cos(\sin^2(x)) - 1) dx = -\frac{1}{6} \cdot 10^{-3} \quad \text{mit } 4 \text{ decimalen} \quad \underbrace{\leq 10^{-5}}_{\leq \left(\frac{1}{10} - 0\right) (\max B(x))}$$

Optimering: Låt $f(x)$ vara deriverbar (~~läsa~~ så många gånger vi behöver) på $]a, b[$ och

$$f'(x_0) = 0.$$

Då vet vi att

x_0 är ett lokalt maximum om

$$f''(x_0) < 0$$

minimum om

$$f''(x_0) > 0$$

obestämt
~~obestämt~~ då $f''(x_0) = 0$

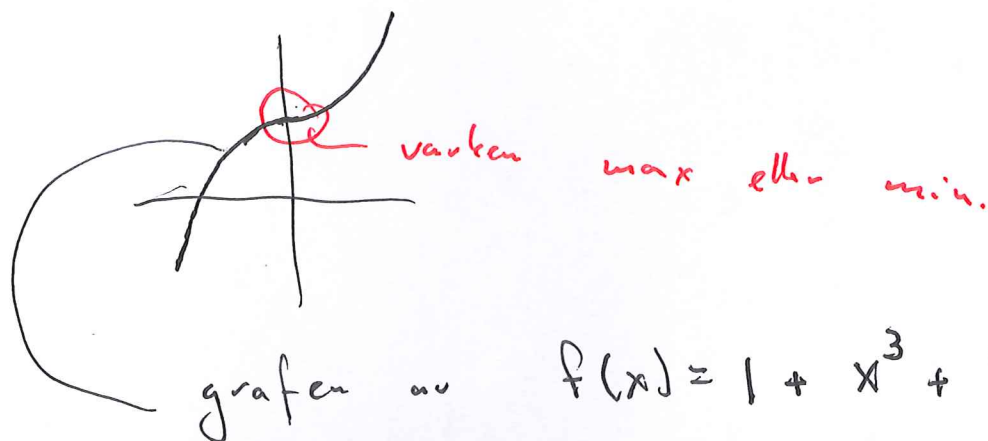
Exempel: $f(x) = \cos(x) + x^3 + \frac{x^2}{2}$ uppfyller

$$f'(0) = -\sin(0) + 3 \cdot 0^2 + 0 = 0$$

$$f''(0) = -\cos(0) + 6 \cdot 0 + 1 = 0$$

men $f'''(0) = 6$

så grafen av $f(x)$ ser



Sats: Låt $f(x)$ vara ^{kontinuerlig} deriverbar $n+1$ gånger på $]a, b[$ och $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ och $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ då

i) Om n är udden så är x_0 ~~varken~~ varken min eller max punkt

ii) Om n är jämn och

$f^{(n)}(x_0) > 0$ så är x_0 en lokal minimipunkt

iii) Om n är jämn och $f^{(n)}(x_0) < 0$ så är x_0 en lokal max punkt

Bevis: Vi börjar med

ii)
$$f(x) = f(x_0) + \overbrace{f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}}^{=0} + \frac{B_{n+1}(x)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$
 enligt Taylors sats där $|B_{n+1}|$ är begränsad, $|B_{n+1}| \leq C$

$$\text{Så } f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^n \left(\underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}_{>0} + \underbrace{B_{n+1}(x)}_{|B_{n+1}(x)| \leq C} (x-x_0) \right)$$

$$\geq \left\{ \begin{array}{l} \text{om } |x-x_0| \leq \frac{f^{(n)}(x_0)}{2n!C} \end{array} \right\} \geq (x-x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} - \frac{|B_{n+1}(x)| f^{(n)}(x_0)}{2C n!} \right) \geq (x-x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{2n!} \right) \geq 0$$

endast då $x=x_0$

Si $f(x) > f(x_0)$ for all $x \neq x_0$

si $|x - x_0| \leq \frac{f^{(n)}(x_0)}{2C(n!)}$.

Si x_0 est localement minima.