

1)

Inl. i Resultat på nätet

ii) Underbänd är ett preliminärt resultat

Kurskarta

1) Smärter att betrakta karten

Kommentaren

i) Teorin är sammanhållen. Allt hänger ihop

ii) Grunden 

- I ϵ - δ definitionen
- II Riemanns integralen
- III De reella talen (kompletthet & Bolz.-Weierstrass)

iii) Saknas

- i) Medelvärdessatsen (både diff & int. kalkylen)

ii) $f' = 0$ vid stationär punkt

iii) Taylorserier

iv) Tillämpningar 

- Rotationskurvor
- grafen (vita)
- optimering etc.

v) Pilar 

- kompletthet till Riemann
- olikheter
- etc.

2. Tentaplugg.

I) Börja med 2-sidor "Hur man läser matte"
Varför?

II) Vad ska vi lära er?

1) Göra beräkningar

i) Lösa diff ekv.

ii) Beräkna integraler

iii) — — — derivator

iv) Allt annat i "Tentaplugg"

2) Förstå teorin, kunna läsa matte

i) Vad betyder definitioner

ii) Vad säger Satsen

iii) Hur hänger de ihop
med beräkningarna

iv) Matematisk metod

v) etc.

III) Hur ska vi repetera?

1) INTE BARA RÄKNA EN EX-TENTA

2) Utan vi vill lära oss förstå och
tolka matematisk teori och text.

IDAG SKA VI

1) Diskutera teori: $\varepsilon - \delta$
kontinuitet

2) Hur man läser matte

3) Fokusera på derivator.

Imorgon

1) Mer beräkningar

2) Men mest teori.

ε - δ definitioner.

Def: Vi säger att $f(x) \rightarrow a$ då $x \rightarrow x_0$ ^{$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ om}
det för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta_\varepsilon > 0$
så att

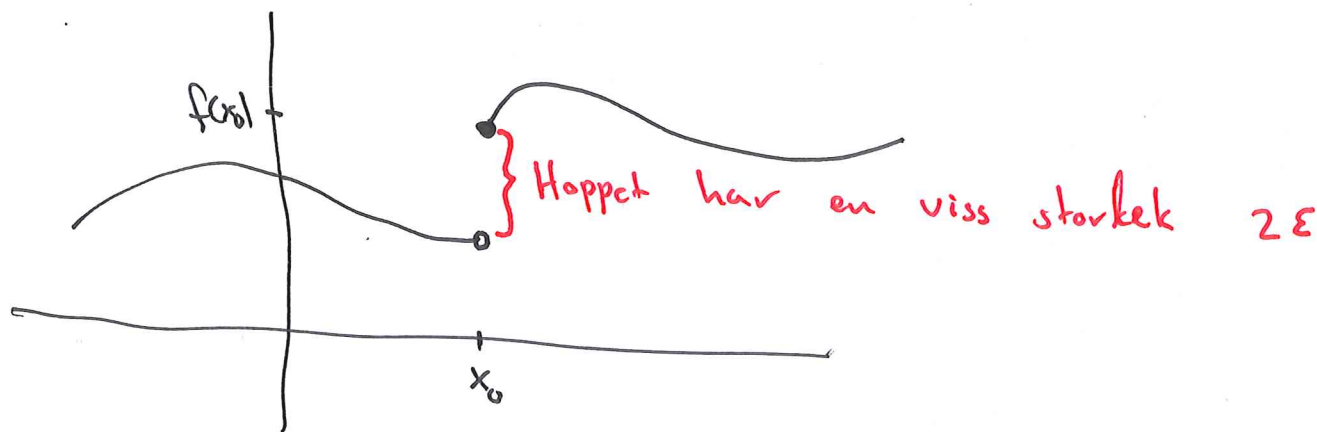
$$|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Def: Vi säger att $f(x)$ är kontinuerlig i x_0
om det finns ett $a = f(x_0)$ så att

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$$

Vi säger att $f(x)$ är kontinuerlig om
 $f(x)$ är kontinuerlig för varje $x_0 \in D_f$.

Vi är rädda för grafer som ser ut
så här



Då finns det inget $\delta_\varepsilon > 0$ så att

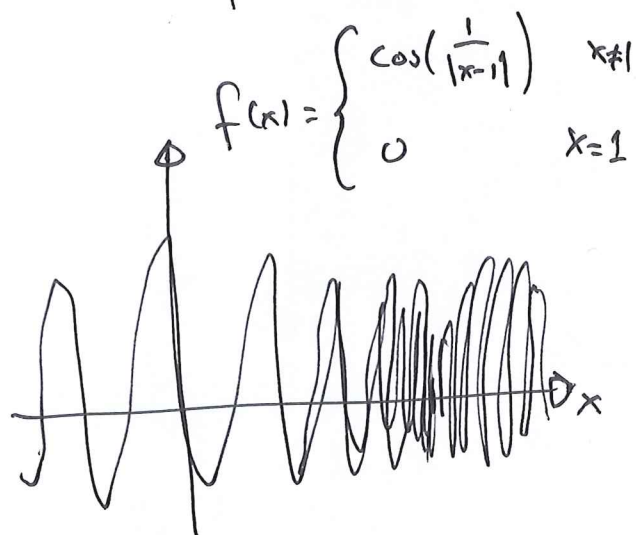
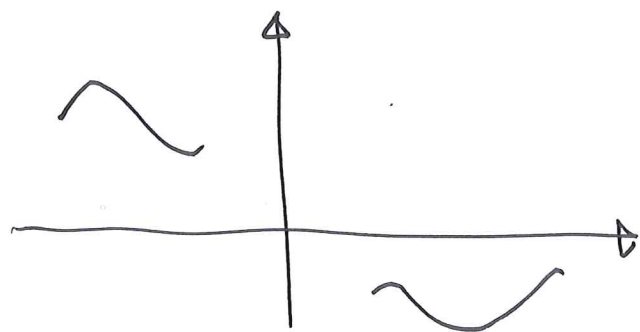
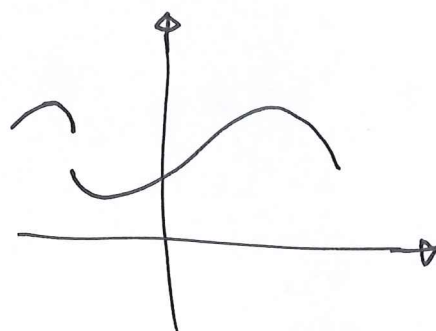
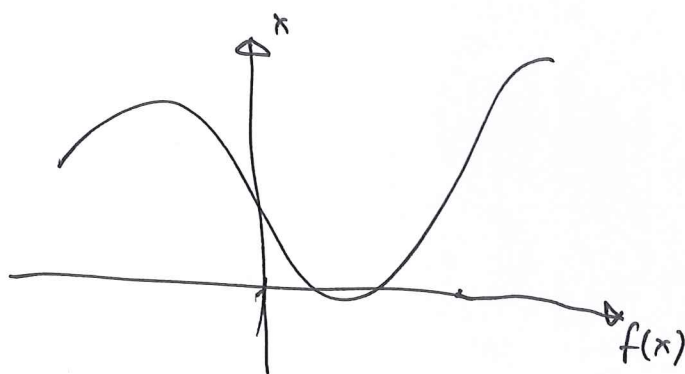
$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Så om det finns ett δ_ε så att

$$|x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Så kan inte f ha ett hopp av storlek ε i x_0 . Så definitionen säger att f är kontinuerlig om grafen inte har ett hopp av någon storlek i x_0 .

Vilka av följande är kontinuerliga



Förstå definitionen!

Sats: Om $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$
 då kommer $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$.

Bevis: 1. Uppendant att A & B måste hålla, i allmänhet, för att slutsatsen ska hålla.

Vi antar att det för varje $\varepsilon > 0$ $\exists \delta_{f,\varepsilon} > 0$ och ett $\delta_{g,\varepsilon} > 0$ så att

$$|x - x_0| < \delta_{f,\varepsilon} \Rightarrow |f(x) - \overset{a}{\cancel{f(x_0)}}| < \varepsilon$$

$$|x - x_0| < \delta_{g,\varepsilon} \Rightarrow |g(x) - \overset{b}{\cancel{g(x_0)}}| < \varepsilon$$

Vill visa att $\exists \delta_{\pm,\varepsilon}$ så att

$$|x - x_0| < \delta_{\pm,\varepsilon} \Rightarrow |f(x) + g(x) - (a+b)| < \varepsilon.$$

Välj $\delta_{\pm,\varepsilon} = \min(\delta_{f,\varepsilon/2}, \delta_{g,\varepsilon/2})$ vilket existerar

då kommer, för $|x - x_0| < \delta_{\pm,\varepsilon}$

$$|f(x) + g(x) - (a+b)| \leq \left\{ \begin{array}{l} \text{triangel} \\ \text{olikheten} \end{array} \right\} \leq \underbrace{|f(x) - a|}_{\leq \varepsilon/2 \text{ då } |x-x_0| < \delta_{f,\varepsilon/2}} + \underbrace{|g(x) - b|}_{< \varepsilon/2} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Så $\delta_{\pm,\varepsilon}$ existerar.

Följsats: Om f & g är kontinuerliga
så är $f \pm g$ kontinuerlig

Bevis teori: När vi gör ett bevis
så får vi använda

- 1) Definitionerna (det för bakt)
- 2) Andra satsen (Triangel olik)
- 3) Elementär logik.

Sats. Om $f(x)$ är deriverbar på $]a, b[$ och $f(x)$ har ett lokalt maxima (minima) i $x_0 \in]a, b[$ så kommer

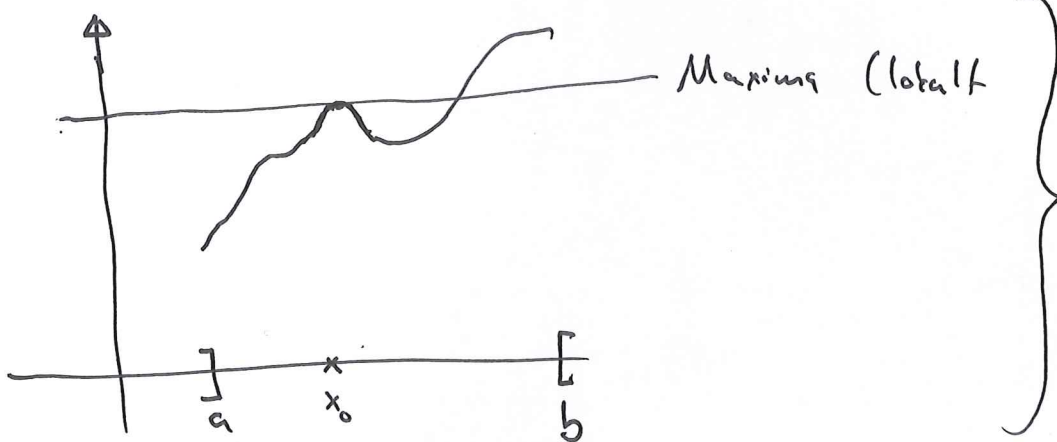
$$f'(x_0) = 0.$$

Slutsats.

Är antaganden nödvändiga?

A) Slutsatsen innehåller derivatan i x_0
 så f måste vara deriverbar i x_0 i
 alla fall

B) Måste vara nödvändig.



Rimlighets
koll.

Satsen är
rimlig.

Bevis: Vi antar (A) att $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ existerar.

Vi vill bevisa att $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = 0$.

Vi måste använda antagande B, dvs för alla h

$$f(x_0+h) \leq f(x_0) \quad (\text{Antagande B})$$

~~Att:~~ Så

$$f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0. \quad (1)$$

Om vi delar med ett $h > 0$ så får vi

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \quad h > 0 \quad (2)$$

Så enligt satsen om olikhet i övergång av gränsvärde så får vi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0. \quad (3)$$

Eftersom gränsvärdet existerar

(2) + övergång med olik

På samma sätt får vi, om vi delar (1) med $h < 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \quad (4)$$

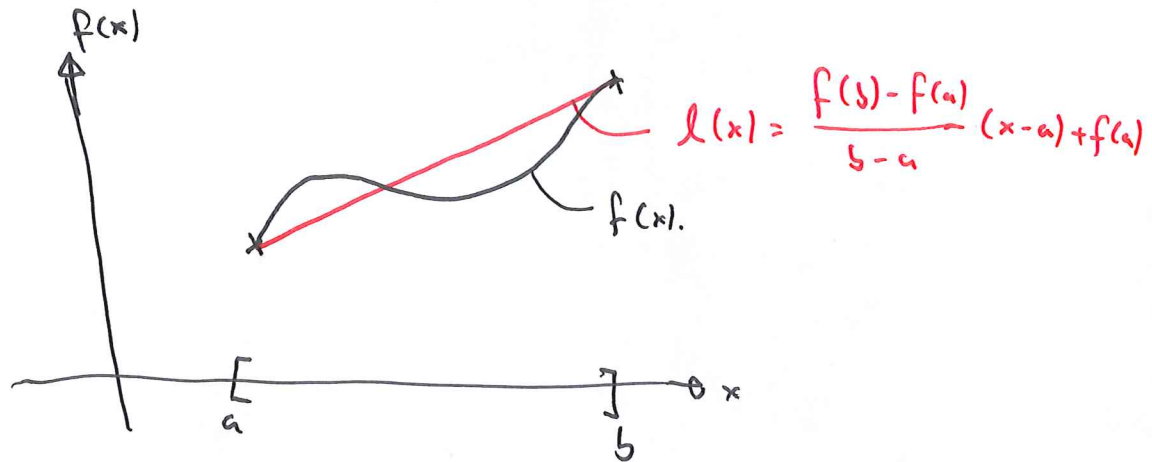
$$(3) \&(4) \text{ ger } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = 0.$$



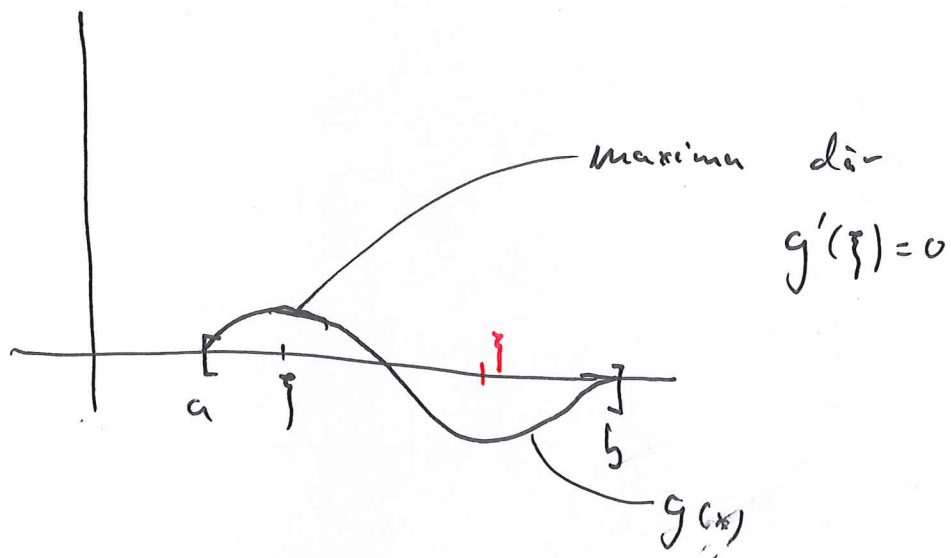
Följsats: Om $f(x)$ är deriverbar på $[a, b]$ så finns det ett $\xi \in [a, b]$ så att

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(\xi).$$

Bevisidé:



Skiv $g(x) = f(x) - l(x)$



dvs

$$g'(\xi) = f'(\xi) - l'(\xi) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$f'(\xi) = l'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \Rightarrow$$

$$(b-a) f'(\xi) = f(b) - f(a).$$

Så satserna hänger ihop.

Om vi bevisar att $f'(x) = 0$ vid
extrempunkter så följer differentiakalkylens
medelvärdessats. Båda satserna är nästan
samma sak. Matematiken hänger ihop,
pilar i kartan.

Följsats: Om $f'(x) \geq 0$ för alla x
så är $f(x)$ växande.

Rimligt
eftersom
vi talar
derivatan
som
förändringen

Bevis: ~~Låt~~ Vi vill bevisa att

Om $b > a$ så är $f(b) \geq f(a)$, dvs $f(b) - f(a) \geq 0$

Eftligt medelvärdessatsen så finns det ett

$\xi \in [a, b]$ så att

$$f(b) - f(a) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0} \underbrace{(b-a)}_{> 0} \geq 0$$

vilket skulle bevisas.



Det är ovanstående sats som bevisar att
derivatan har med förändringen att göra.
Teorin visar att intuitionen stämmer!