

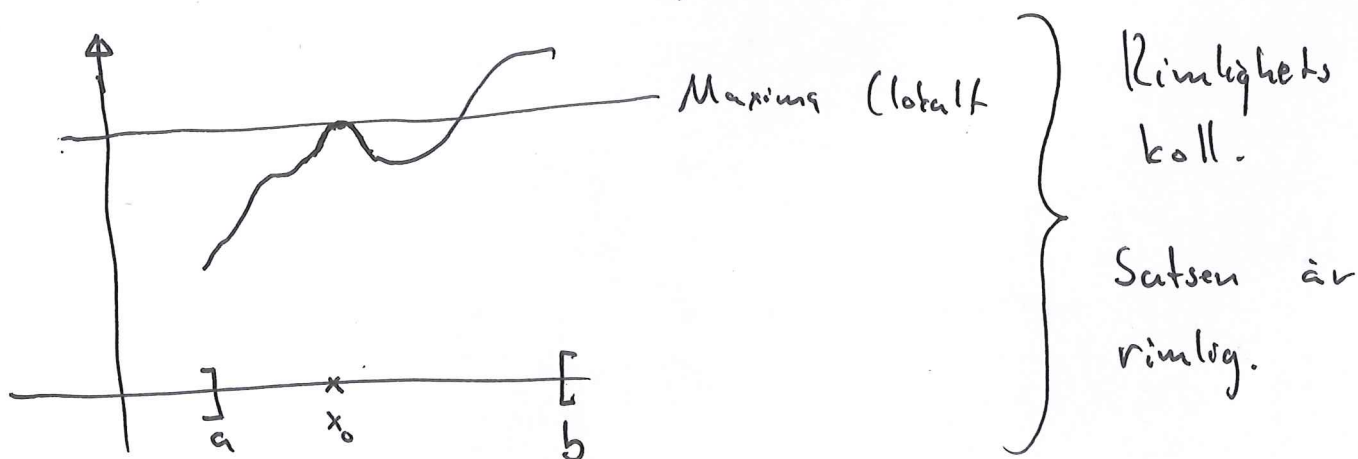
Sats. Om $f(x)$ är deriverbar ^{i x_0} på $]a, b[$ och $f(x)$ har ett lokalt ^A maxima ~~(minima)~~ i $x_0 \in]a, b[$ ^B så kommer $f'(x_0) = 0$. ^C öppet intervall

Slutsats.

Är antaganden nödvändiga?

A) Slutsatsen innehåller derivatan i x_0
 så f måste vara deriverbar i x_0 i
 alla fall

B) Måste vara nödvändig.



Bevis: Vi antar (A) att $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ existerar.

Vi vill bevisa att $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = 0$.

Vi måste använda antagande B, dvs för små h

$$f(x_0+h) \leq f(x_0) \quad (\text{Antagande B})$$

~~Att~~ Så

$$f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0. \quad (1)$$

Om vi delar med ett $h > 0$ så får vi

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \quad h > 0 \quad (2)$$

Så enligt satsen om olikhet i övergång av gränsvärde så får vi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0. \quad (3)$$

ANVÄNDER B $f(x_0+h)$ är def för $h > 0$.

Eftersom gränsvärdet existerar A

(2) + övergång med olik

På samma sätt får vi, om vi delar (1) med $h < 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

så används B genom att $f(x_0+h)$ är definierad för $h < 0$.

(4)

(3) & (4) ger $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = 0.$

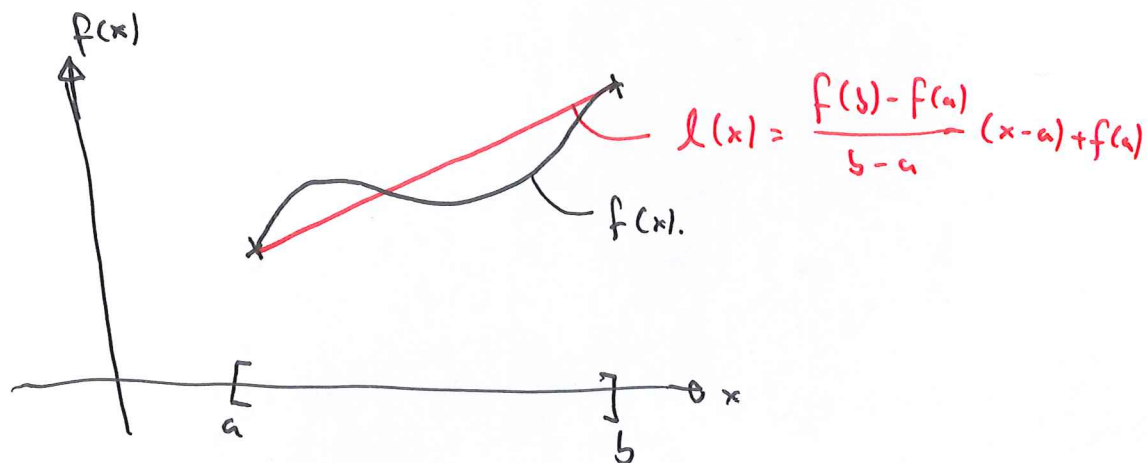


Observera att vi
använder alla antaganden vi gör
i beviset.

Följsats: Om $f(x)$ är deriverbar på $[a, b]$ så finns det ett $\xi \in [a, b]$ så att

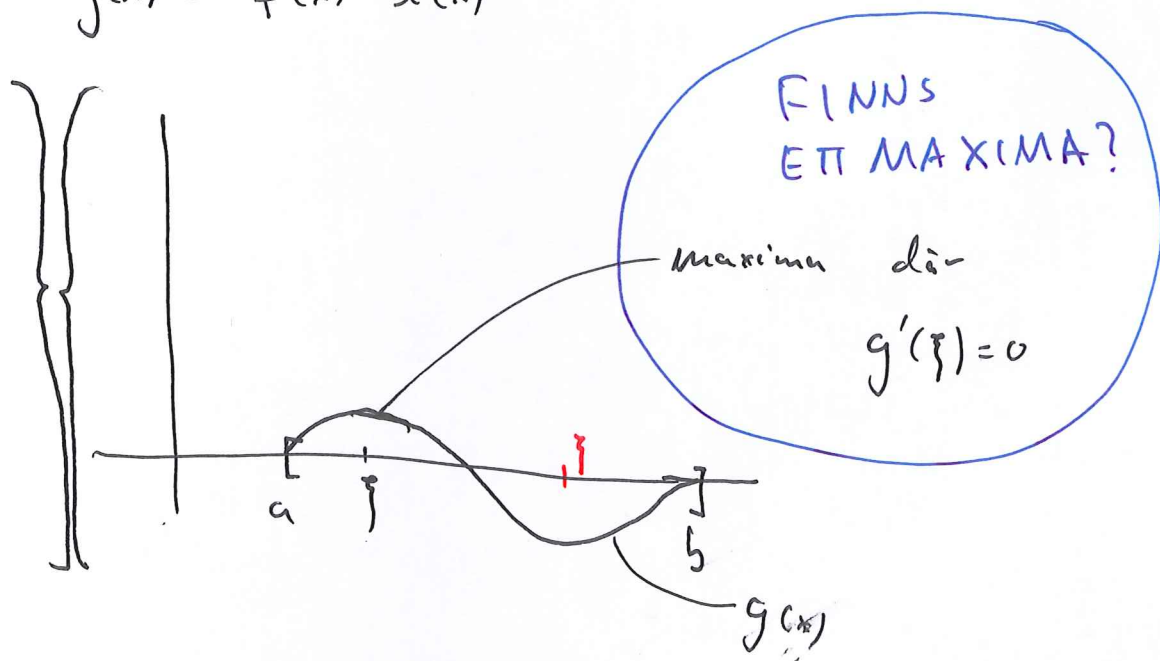
$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(\xi).$$

Bevisidé:



Skriv $g(x) = f(x) - l(x)$

Det svåra är att visa att g har max eller min. Detta följer av vad vi vet om kontinuerliga funktioner.



dvs

$$g'(\xi) = f'(\xi) - l'(\xi) = 0$$

$$f'(\xi) = l'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$(b-a) f'(\xi) = f(b) - f(a).$$

$\Rightarrow$ HUR VET VI ATT MAXIMA INTE INTERFERERAR eller

BEVIS: Definiera $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) - f(a)$.

Vi vill bevisa att det finns ett ξ så att

$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \quad (1)$$

för då är $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ vilket skulle bevisas.

Observera att $g(x)$ är deriverbar på $[a, b]$ eftersom

Summan av två deriverbara funktioner är deriverbar.

SATS

så $g(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$ eftersom

Deriverbara funktioner är kontinuerliga.

SATS

Vi får 3 fall

Fall 1 $g(x) = 0$ för alla $x \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow (1)$ VSB.

Fall 2 $g(x_0) > 0$ för något $x_0 \in [a, b]$.

Då kommer $g(x)$ att ha ett globalt, och därför lokalt, maximum i någon punkt $\xi \in [a, b]$, eftersom

Kontinuerliga funktioner antar sitt maximum i någon punkt av slutna begränsade intervall

SATS

Och, eftersom ξ är ett maximum så kommer

$$g(\xi) \geq g(x_0) > 0 \quad \text{så} \quad \xi \neq a \quad \text{och} \quad \xi \neq b$$

$$\text{så} \quad \xi \in]a, b[$$

} Def
maxima

Vi har därmed bevisat att

$g(x)$ är deriverbar på $[a, b]$

$g(x)$ har ett lokalt maximum i $\xi \in]a, b[$

så enl. föregående sats så är

SATS

$g'(\xi) = 0$ vilket skulle bevisas

Fall 3 $g(x_0) \leq 0$ för något $x_0 \in [a, b]$

Använd Fall 2 på $-g(x) \Rightarrow -g'(\xi) = 0$

$\Rightarrow g'(\xi) = 0$.



Remarks: 1/ Varje steg bygger på

i) Antagande

ii) Definition

iii) redan bevisad sats

iv) enkla räkningar

v) enkel logik ("vi får 3 fall")

2/ Viktigt är att förstå att
idéen är att använda $f'(\xi) = 0$
om ξ är en extrempunkt. Resten
handlar om att

- i) välja g så att
satsen $g' = 0$ i extrema
kan användas
- ii) visa att antaganden är
uppfyllda.

PRIMITIVA FUNKTIONER

1 KAN MAN DIREKT SE LÖSNINGEN

JÄ

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan(x) + C$$

$$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln(x+a) + C$$

etc

NEJ

KAN VI SKRIVA DEN SOM $\int g'(x) f(x) dx$ DÄR $\int f'(x) g(x) dx$ ÄR ENKLARE

JÄ

GÖR EN PARTIELL INTEGRATION

NEJ

RATIONELL FUNKTION I x OCH $\sqrt{-x^2+ax+b}$

SÄTT $t = x - \frac{a}{2}$

GUIDE

- 1) KAN VI GÖRA EN PARTIELL INT
- 2) KAN VI GÖRA EN STANDARD SUBST SOM LEDER TILL EN
- 3) PARTIALBRÄKSUPP. SOM GER 2 INTEGRANDER $\frac{1}{(x+a)^n}$ OCH $\frac{1}{(x^2+ax+b)^n}$

STANDARD SUBSTITUTIONER

ÄR INTEGRANDEN EN RATIONELL FUNK. I x OCH $\sqrt{x+a}$

JÄ

GÖR SUBSTITUTIONEN $t = \sqrt{x+a}$

ÄR INTEGRANDEN EN RATIONELL FUNKTION I x OCH $\sqrt{\frac{x+a}{x+b}}$

JÄ

GÖR SUBST. $t = \sqrt{\frac{x+a}{x+b}}$

RATIONELL FUNK I x OCH $\sqrt{x^2+ax+b}$

JÄ

GÖR SUBSTITUTIONEN $t = x + \frac{a}{2}$

RATIONELL FUNK I $\sin(x)$ & $\cos(x)$

JÄ

GÖR SUBST. $t = \tan(\frac{x}{2})$

INTEGRERA TERMER PÅ FORMEN $\frac{A}{(x+B)^n}$ ENKELT

GÖR EN PARTIALBRÄKSUPPDELNING

NY INTEGRAND MED t OCH $\sqrt{t^2+a}$

NY INTEGRAND MED t OCH $\sqrt{-t^2+a}$

SUBSTITUERA $t = x + \frac{a}{2}$

TERMER PÅ FORM $\frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n}$

GÖR SUBST $t + \sqrt{t^2+a} = s$

GÖR SUBST $s = \arcsin(\frac{t}{\sqrt{a}})$

$$\int \frac{ct}{t^2+a} + \int \frac{d}{t^2+a}$$

$$\frac{c}{2} \ln(t^2+a) + \frac{d}{a} \arctan(\frac{t}{\sqrt{a}})$$

SKRIV $\int \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n} dx$

SE SID 275-276 I PB

~~$\int \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^n} dx$~~

Vi har bara 2 metoder att

hitta primitiva funktioner, och massa enkla manövrerade fall, och partialbräksuppdelning $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^n} + \frac{A_2}{(x-a)^{n+1}} + \dots +$

Lös

$$\int f(x) dx$$

Partiell
Integration

Substitution

5 standard

subst som
alla leder till

Partialbräks
uppdelning

$$\frac{1}{(x-a)^n}$$

$$\frac{Ax+b}{(x^2+ax+b)^n}$$

Det enda sättet att lära sig detta väl
är att räkna jättemycket. Det gäller att
få ett öga för det.

Tex att kunna se att

$$\begin{aligned}\int x^4 \ln(x) dx &= \int \frac{1}{5} \frac{d x^5}{dx} \ln(x) dx = \\&= \frac{x^5 \ln(x)}{5} - \int \frac{1}{5} x^5 \frac{d \ln(x)}{dx} dx = \\&= \frac{x^5 \ln(x)}{5} - \underbrace{\int \frac{1}{5} x^4 dx}_{\text{Polynom enkelt integrerat.}}\end{aligned}$$

Man kan bara "se" att det
går att skriva om $\int x^4 \ln(x) dx$ (eller
mer allmänt $\int p(x) \ln(x) dx$, för $p(x)$ ett polynom)
som den primitiva funktionen av ett polynom
med träning. Träna därför mycket.