Inlämningsuppgift 2 SF1602 HT2013

A Efternamn, Förnamn: ________________________________ **Personnummer:** ____________________
Program: ________________

B Efternamn, Förnamn: ________________________________ **Personnummer:** ____________________
Program: ________________

C Efternamn, Förnamn: ________________________________ **Personnummer:** ____________________
Program: ________________

Instruktioner: Gör följande uppgifter. Välj de två svar som ni är mest nöjda med och lämna in till din övningsassistent Fredagen den 13e December. Den uppgift som ni inte lämnar in är den som är riktig matematik - dvs. en idel lek där vi gör matematik för att det är kul (men den påverkar inte ert betyg på något sätt). 10 poäng per uppgift, för godkänt krävs 14 poäng av 20.

Uppgift 1 [Taylorserier]: Låt $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|^2}} & \text{om } x > 0 \\ 0 & \text{om } x \leq 0. \end{cases}$

a) Visa att $f'(0) = 0$. [Ledtråd: Derivatans definition.]

b) Antag att det finns två polynom $p_k(x)$ och $q_k(x)$ så att $q_k(x) \neq 0$ då $x \neq 0$ och

$$\frac{d^k f(x)}{dx^k} = \begin{cases} \frac{p_k(x)}{q_k(x)} e^{-\frac{1}{|x|^2}} & \text{om } x > 0 \\ 0 & \text{om } x \leq 0. \end{cases}$$

Bevisa att det finns två polynom $p_{k+1}(x)$ och $q_{k+1}(x)$ så att $q_{k+1}(x) \neq 0$ då $x \neq 0$ så att

$$\frac{d^{k+1} f(x)}{dx^{k+1}} = \begin{cases} \frac{p_{k+1}(x)}{q_{k+1}(x)} e^{-\frac{1}{|x|^2}} & \text{om } x > 0 \\ 0 & \text{om } x \leq 0. \end{cases}$$

c) Definiera $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Vilket värde har a_k? Vad är Taylorserien av ordning n till $f(x)$ i punkten $x = 0$?

d) Reflektera kort (ett par rader) över ditt svar. **[10poäng]**

Uppgift 2 [Taylorserier för sin och cos]: Antag utan bevis att

$$\int_0^x \sin(t)dt = 1 - \cos(x) \qquad \text{och} \qquad \int_0^x \cos(t)dt = \sin(x)$$

samt att $|\cos(x)| \leq 1$ för alla x.

a) Bevisa att, för $x \geq 0$,

$$\sin(x) \leq x \qquad \text{och} \qquad \cos(x) \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$$

$$\sin(x) \geq x - \frac{1}{6}x^3 \qquad \text{och} \qquad \cos(x) \leq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4.$$

b) Använd induktion för att bevisa att för varje $k \geq 1$, och $x \geq 0$, så

$$\sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)!} x^{2n-1} \leq \sin(x) \leq \sum_{n=1}^{2k-1} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)!} x^{2n-1}$$

och

$$\sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-2)!} x^{2n-2} \leq \cos(x) \leq \sum_{n=1}^{2k-1} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-2)!} x^{2n-2}.$$

c) Använd ovanstående skattningar för att beräkna $\cos(x_0)$ och $\sin(x_0)$ med 7 korrekta decimaler. Här är $x_0 = \frac{1}{a+b+c}$ där a, b och c är den sista nollskilda siffran i gruppmedlem A, B och Cs personnummer.

[10poäng]

Uppgift 3 [Taylorserier och Differentialekvationer]: Vi vill lösa

$$y''(x) + ay'(x) + 2y(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} E(x) \tag{1}$$

med initialdata $y(0) = b$ och $y'(0) = c$ där a, b och c är den sista nollskilda siffran i gruppmedlem A, B och Cs personnummer. Funktionen $E(x)$ är sen så kallade *"Error function"* (viktig i bland annat matematisk statistik) och definieras

$$E(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1},$$

där Maclaurinserien till $E(x)$ antas vara given (behöver inte bevisas).

a) Antag att lösningen, $y(x)$, existerar och att alla dess derivator existerar. Hitta andra ordningens Maclaurinpolynom till $y(x)$.

b) Derivera båda sidor i (1) med avseende på x och härled en andra ordningens differential ekvation for $z(x) = y'(x)$. Beräkna andra ordningens Maclaurinpolynom för $z(x)$ och därigenom tredje ordningens Maclaurinpolynom för $y(x)$.

c) Hitta ett induktivt uttryck för koefficienterna i Maclaurinserien till $y(x)$. Dvs. ett sätt att beräkna den $(n+1) : a$ koefficienten ur de n första koefficienterna i Maclaurinserien.

d) Ange Maclaurinpolynomet av ordning fem, med restterm, till $y(x)$.

[10poäng]

Fullständiga lösningar lämnas till din övningsledare senast den 13e December under övningstid.

Lycka till!