Tränings Kontrollskrivning 1 SF1602 HT2013 Med Lösningar

Namn: John Andersson **Personnummer:** 123456 - 7890

Program: 12 stegs program på AA

Hjälpmedel: Papper, penna, miniräknare och formelsamlingen Beta.
Totalt 16 poäng. För godkänt krävs 10 poäng.

1: Gör följande uppgifter. Ingen motivering krävs! Inom parentes anges hur svaret skall anges.

a) Skissa grafen av en funktion på intervallet $]0, \infty[$ som har asymptoten $x-1$ då $x \to \infty$ och en lodrät asymptot då $x \to 0^+$? [SVARA MED EN TYDLIG SKETCH.]

b) Finns det en funktion $g(x)$, definierad på hela $\mathbb{R}$, så att $\lim_{x\to\infty} g(x)$ inte existerar men $\lim_{x\to\infty} \cos(g(x)) = 1/2$ [SVARA MED JA/NEJ.]

c) Låt $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ och antag att $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2} = 3$ ange alla lösningar till $f(x)$=0. [ANGE LÖSN.]
Det var ett typo i definitionen av f i en tidigare verision.

d) Antag att $f(x)$ är strikt monoton på $[0,2]$, att $f(0) = 0$ och $f(2) = 2$ kan man säkert lösa ekvationen $f(x) = 1$. [SVARA MED JA/NEJ OCH EN TYDLIG SKETCH SOM VISAR VARFÖR.]

e) Rita grafen av en strikt monoton funktion $f(x)$ på intervallet $[0, \infty[$ så att inversens definitionesmängd, $D_{f^{-1}}$, är $[1, 4[$. [SVARA MED EN TYDLIG SKETCH.]

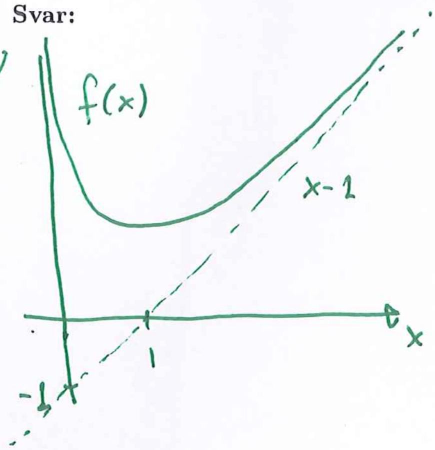
f) Vad är gränsvärdet $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4+3e^x}{\ln(x)+4x^4+e^x}$? [SVARA ANTINGEN "ODEFINIERAT" ELLER MED ETT TAL.]

g) För vilka $y \in \mathbb{R}$ kan vi lösa $\arctan(x) = y$. [SVARA MED ETT INTERVALL.]

h) Låt $f(x)$ vara en injektiv funktion och $f^{-1}(y)$ dess invers. Har f^{-1} en invers? Ange i så fall inversen. [SVARA JA/NEJ OCH ANGE INVERSEN OM DEN FINNS.] **[8poäng]**

Svar:

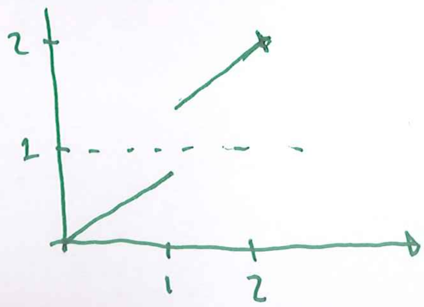
a)



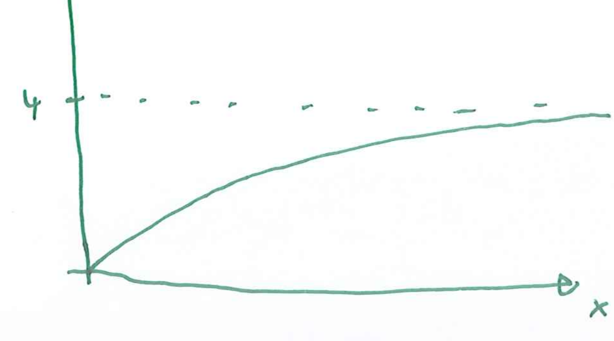
b) JA

c) 1 (dubbelrot)
-2

d) Nej,



e)



f) 3

g) $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

h) JA, inversen är f(x)

2: Ange alla $x \in \mathbb{R}$ så att $|x-1| \leq 1$ och $|x-2| < 1$. Redovisa tydligt alla beräkningar. **[4poäng]**

Svar: Om $|x-1| \leq 1$ så gäller $-1 \leq x-1 \leq 1$, eller omskrivet att $0 \leq x \leq 2$. På samma sätt så gäller det att $|x-2| < 1$ är ekvivalent med $-1 < x-2 < 1$, dvs. $1 < x < 3$.

Om $0 \leq x \leq 2$ och $1 < x < 3$ så måste x uppfylla $1 < x \leq 2$.

Svar: $1 < x \leq 2$.

3: Hitta alla lösningar till följande ekvation: $\log_2(\sin(x) + \cos(x)) = 0$. Här använder vi beteckningen ${}^2\log = \log_2$ för 2-logaritmen. Redovisa tydligt alla beräkningar. **[4poäng]**

Svar: Eftersom $\log_2(x) = 0$ endast om $x = 1$ så kan vi dra slutsatsen att

$$2\sin(x) + 2\cos(x) = 1 \Rightarrow \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x)\right) = 1. \tag{1}$$

Enligt additionsreglerna för sin så gäller

$$\sin(x+\delta) = \sin(\delta)\cos(x) + \cos(\delta)\sin(x)$$

så om $\delta = \frac{\pi}{4}$ så är $\sin(x+\delta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x)$. Därför så är (1) ekvivalent med

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Det följer att $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ eller $x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ för något $n \in \mathbb{Z}$. En elementär beräkning ger följande:

Svar: Antingen så är $x = 2\pi n$ eller $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ för något $n \in \mathbb{Z}$.