Kontrollskrivning 1 SF1602 HT2013

Namn: ______________________________ **Personnummer:** ____________________

Program: ______________

Hjälpmedel: Papper, penna, miniräknare och formelsamlingen Beta.
Totalt 16 poäng. För godkänt krävs 10 poäng.

1: Gör följande uppgifter. Ingen motivering krävs! Inom parentes anges hur svaret skall anges.

a) Är $\log(\sin(x))$ kontinuerlig på intervallet $]0, \pi[$? [SVARA MED JA ELLER NEJ.]

b) Rita grafen av en funktion som inte är kontinuerlig. [SVARA MED EN TYDLIG SKETCH.]

c) Rita grafen av en funktion som är injektiv men inte monoton. [SVARA MED EN TYDLIG SKETCH.]

d) Rita grafen av en funktion som är monoton men inte injektiv. [SVARA MED EN TYDLIG SKETCH.]

e) Ange ett x så att $\arcsin(\sin(x)) \neq x$. [SVARA MED ETT TAL.]

f) Vad är gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+6x}{3\sin(x)}$? [SVARA ANTINGEN "ODEFINIERAT" ELLER MED ETT TAL.]

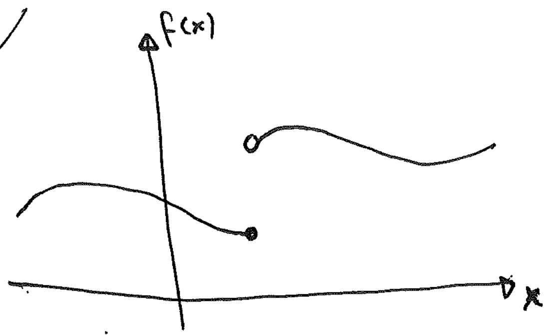
g) Hur många lösningar har $\arcsin(x) = \pi$ i intervallet $[-1, 1]$. [ANGE ANTALET LÖSNINGAR.]

h) Givet ett polynom $f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, så att $f(0) = 1$ och $f(-1) = f(1) = 0$, ange hur många lösningar ekvationen $f(x) = 0$ har som minst. [SVARA MED ETT HELTAL]. **[8poäng]**

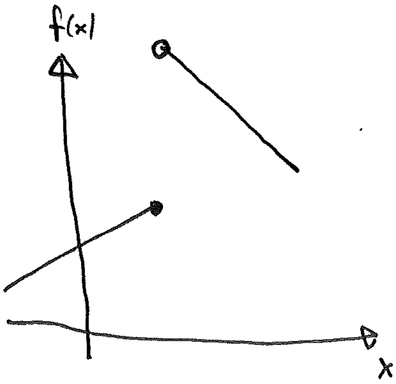
Svar: Motiveringar ej nödvändiga!

a) JA (log kontin. för $x > 0$)

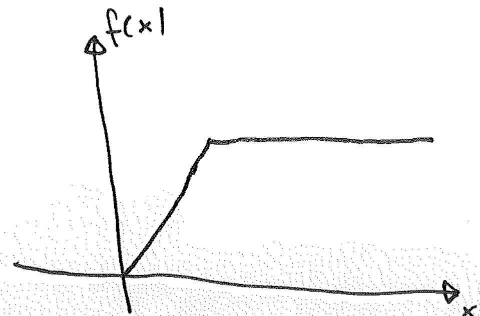
b)



c)



d)



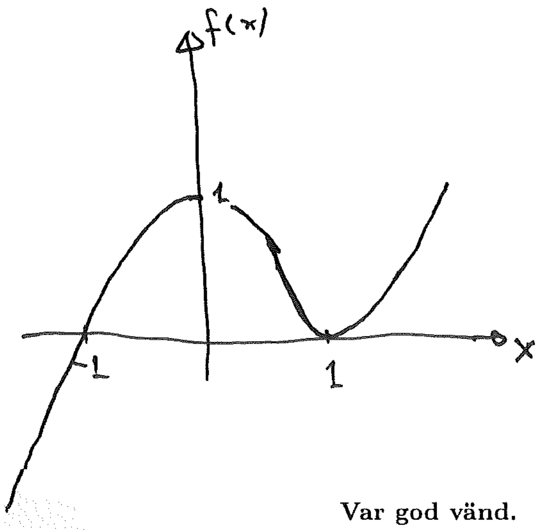
Observera! Inte strikt monoton.

e) 2π ($V_{arcsin} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)

f) 2,

g) 0, ($V_{arcsin} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ så $\pi \notin V_{arcsin}$)

h) 2,



Var god vänd.

$f(x) = (x^2+1)(x-1)^2(x+1)$ är ett exempel.

2: För vilka x gäller följande olikhet: $|x-3| < 2x-4$. Redovisa tydligt alla beräkningar. **[3poäng]**

Svar: Vi har två fall:

Fall 1: *Om* $x-3 \geq 0$, *d.v.s* $x \geq 3$. Då är $|x-3| = x-3$ och vi letar efter de x då $x-3 < 2x-4$. Efter en enkel omskrivning så får vi $1 < x$. Så i fall 1 får vi alla x så att $x \geq 3$ och $x > 1$, d.v.s. alla $x \geq 3$.

Fall 2: *Om* $x-3 < 0$, *d.v.s* $x < 3$. I fall 2 så är $|x-3| = -x+3$ och olikheten blir $-x+3 < 2x-4$. Så vi är intresserade av alla x så att $7 < 3x$ eller $\frac{7}{3} < x$. Så olikheterna i fall 2 blir $x < 3$ och $\frac{7}{3} < x$. Fall 2 ger därför alla x så att $\frac{7}{3} < x < 3$.

Om vi sätter ihop fall 1 och fall 2 så får vi alla x så att $x \geq 3$ eller $\frac{7}{3} < x < 3$ vilket är samma sak som $\frac{7}{3} < x$.

Svar: $\frac{7}{3} < x$.

3: Hitta alla lösningar till följande ekvation: $2\log_2(\sin(x)) = \log_2\left(\sin(x) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}$. Här använder vi beteckningen $^2\log = \log_2$ för 2-logaritmen. Svaret får inte innehålla arcsin, exponentialtermer eller logaritmer. Redovisa tydligt alla beräkningar. **[5poäng]**

Svar: Vi skriver om ekvationen enligt logaritmreglerna

$$\log_2\left(\sin^2(x)\right) = \log_2(\sin(x) - \frac{1}{2\sqrt{2}}) + \log_2(\sqrt{2}) = \log\left(\sqrt{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\right).$$

Eftersom logaritmen är en injektiv funktion så kan vi dra slutsatsen att

$$\sin^2(x) = \sqrt{2}\sin(x) - \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2(x) - \sqrt{2}\sin(x) + \frac{1}{2} = 0. \tag{1}$$

Andragradspolynomet $y^2 - \sqrt{2}y + \frac{1}{2} = 0$ har lösningen $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (dubbelrot). Så vi kan dra slutsatsen, genom att betrakta $\sin(x) = y$, att $\sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, observera att $\sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ gör alla argument i logaritmerna större än noll i (1) så den lösningen är godtagbar. Att $\sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ implicerar $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ eller $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ för $n \in \mathbb{Z}$.

Svar: $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ eller $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ för $n \in \mathbb{Z}$.

Rättningsmall KS 1 SF1602.

Allmän information (främst för studenter): Det här är exakt den rättningsmall som den rättande läraren får (inklusive den här meningen). All information han/hon kommer att ha för att avgöra hur många poäng du får är hans/hennes eget omdöme och följande futtiga instruktioner.

Ofta kommer dina svar att innehålla beräkningar som inte alls omnämns i rättningsmallen. Tänk på detta när du svarar på tentamenstal (eller KS tal) i framtiden. Tydliga svar gör det lättare för den rättande läraren att avgöra hur du tänker och att ge poäng.

Rättningsmall tal 1: 1 poäng för varje rätt svar. 0 poäng för varje fel svar eller för oläsliga grafer. Inga motiveringar krävs.

Rättningsmall tal 2:

1. 1 poäng för att använda definitionen av absolut beloppet rätt och dela upp i två fall.
2. 1 poäng för att beräkna de två olikheterna.
3. 1 poäng för att sätta ihop de två fallen till ett rätt svar.
4. -1 poäng (minst 0 totalt) för att blanda ihop "$<$" med "$\leq$" (oavsett hur många gånger det görs).

Rättningsmall tal 2:

1. 1 poäng för att skriva om uttrycket med logaritmlagarna.
2. 1 poäng för steget att ta bort logaritmen.
3. 1 poäng för att motivera att logaritmen tas bort. Antingen genom att ta exponenten eller genom att påpeka att logaritmen är injektiv.
4. 1 poäng för att på något sätt lösa andragradspolynomet med sin som argument. Det viktiga är att kunna syntetisera kunskapen om polynom med funktioner som argument.
5. 1 poäng för att lösa $\sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Om $+2\pi n$ terman glöms bort så ger det 0 poäng.