# TRÄNINGS Kontrollskrivning 2 SF1602 HT2013

**Namn:** ________________________________ **Personnummer:** ________________

**Program:** ______________

**Hjälpmedel:** Papper, penna, miniräknare och formelsamlingen Beta.
**Totalt 16 poäng. För godkänt krävs 10 poäng.**

**1:** Gör följande uppgifter. Ingen motivering krävs! Inom parentes anges hur svaret skall anges.

**a)** Skissa grafen till en primitiv funktion till $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{om } x \leq -1 \\ 0 & \text{om } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{om } x \geq 0. \end{cases}$ [SVARA MED EN TYDLIG SKETCH.]

**b)** Finns det någon kontinuerlig funktion $f(x)$ med primitiv funktion $F(x)$ så att $F'(x) \neq f(x)$. [SVARA MED ETT EXEMPEL ELLER "OMÖJLIGT".]

**c)** Ange ett $f(x)$ så att $\int f(x)dx = \cos(\sin(x)) + C$. [SVAR MED EN FUNKTION $f(x)$.]

**d)** Om $\int f(x)dx = \frac{\cos(x)}{1-x^2} + C$ vad är $\int \frac{f(\ln(x))}{x}dx$. [SVARA MED EN FUNKTION.]

**e)** Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är integrerbara och att $\int(f(x)+g(x))dx = C$. Vilken relation finns mellan $f(x)$ och $g(x)$? [SVARA RELATIONEN MELLAN $f$ OCH $g$.]

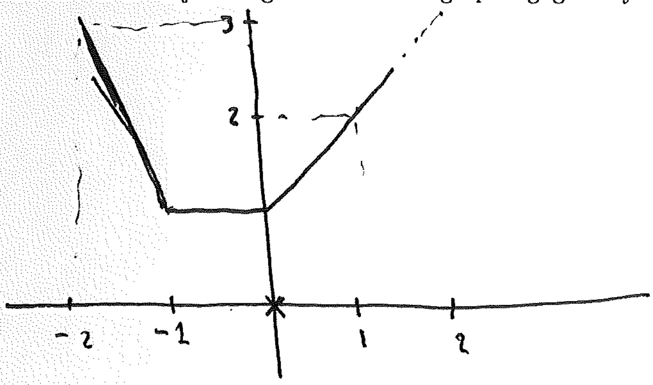
**f)** Är $\frac{1}{x^3+2x^2-6x+3} = \frac{3}{x} + \frac{2}{x-2} - \frac{6}{x-(-2)}$? [SVARA "JA" ELLER "NEJ".]

**g)** Finns det någon funktion $f(x)$ så att $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 1$ och $f(x)$ har en primitiv funktion $F(x)$ så att $\lim_{x\to 3^-} F(x) = \infty$. [SVARA "JA" ELLER "NEJ".]

**h)** Ange ett villkår på $f(x)$ som garanter att $\int f(x)dx$ är strikt konvex. [ANGE VILLKÅRET.]. **[8poäng]**

**Svar:** (I parentes efter varje svar ges en motivering i pedagogiskt syfte. Dessa motiveringar är inte nödvändiga för full poäng.)

**a)**




**b)** Omöjligt. (Enl. definitionen av primitiv funktion.)

**c)** $-\cos(x)\sin(\sin(x))$ (Enl. definitionen av primitiv funktion så $D\int f(x)dx = f(x)$. Så svaret fås genom att derivera båda sidor.)

**d)** $\frac{\cos(\ln(x))}{1-(\ln(x))^2} + C$ (Variabelbytet $t = \ln(x)$ ger $\int \frac{f(\ln(x))}{x}dx = \int f(t)dt = ....$)

**e)** $f(x) = -g(x)$

**f)** Nej. (Observera att $\lim_{x\to 0^{\pm}} HL = \pm\infty$ så om likhet gäller så ska $\lim_{x\to 0^{\pm}} VL = \pm\infty$ vilket inte gäller. Vi behöver alltså inte beräkna någonting.)

**g)** Nej. (Om $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 1$ så är $f(x)$ begränsad nära, och till vänster om, $x = 3$ så $F(x)$ måste också vara begränsad nära och till vänster om $x = 3$.)

**h)** $f(x)$ deriverbar och $f'(x) > 0$ för alla $x$. (Observera att $D^2\int f(x)dx = f'(x)$. Så om $f'(x) > 0$ så är $D^2\int f(x)dx > 0$ dvs. strikt konvex. Det finns en del "fusk-svar" på den här uppgiften. Tex så är ett villkår såsom $f(x) = e^x$ helt korrekt och ger full poäng. Men villkåret $f(x) = e^x$ är lite tarvligt då det inte alls är lika generellt som $f'(x) > 0$. Försök undvika tarvliga lösningar om ni kan.)

**2:** Beräkna $\int x\arctan(x)dx$. [FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **[4poäng]**

**Svar:** Vi beräknar

$$\int x\arctan(x)dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{dx}\arctan(x)dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{partiell} \\ \text{integration} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \arctan(x) - \frac{1}{2}\int x^2 \frac{d\arctan(x)}{dx} dx = \frac{1}{2}x^2 \arctan(x) - \frac{1}{2}\int x^2 \frac{1}{1+x^2} dx. \tag{1}$$

Vi måste alltså beräkna följande integral

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \arctan x + C \tag{2}$$

för någon konstant $C$. Om vi sätter in (2) i (1) så får vi

$$\int x \arctan(x) dx = \frac{1}{2}x^2 \arctan(x) - \frac{x}{2} + \frac{\arctan(x)}{2} + C$$

för någon konstant $C$ (inte nödvändigtvis samma som $C$ i (2)). Den sista likheten är vårt svar.

**3:** Hitta alla primitiva funktioner till $\frac{\cos(x)\sin(x)}{1-\cos^4(x)}$. [FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **[4poäng]**

**Svar:** Vi löser detta med en variabelsubstitution och en partialbråksuppdelning:

$$\int \frac{\cos(x)\sin(x)}{1-\cos^4(x)} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{sätt } t = \cos^2(x) \\ \text{då blir} \\ dt = -\cos(x)\sin(x)dx \end{array} \right\} =$$

$$= -\int \frac{1}{1-t^2} dt = -\int \frac{1}{(1-t)(1+t)} dt.$$

Det sista uttrycket kan partialbråksuppdelas enligt

$$\frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{a}{1+t} + \frac{b}{1-t} = \frac{(b-a)t + (a+b)}{1-t^2}$$

om $b - a = 0$ och $a + b = 1$. En enkel räkning ger $a = b = \frac{1}{2}$. Därför så är

$$-\int \frac{1}{1-t^2} = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\ln|1+t| - \ln|1-t|\right) + C = -\frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1+\cos^2(x)}{1-\cos^2(x)}\right|\right) + C,$$

där vi använde $t = \cos^2(x)$ och logaritmlagar i den sista olikheten. Vårt svar är

$$\int \frac{\cos(x)\sin(x)}{1-\cos^4(x)} dx = -\frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{1+\cos^2(x)}{1-\cos^2(x)}\right|\right) + C.$$