Lösningsförslag Kontrollskrivning 2 SF1602 HT2013

Namn: ______________________________**Personnummer:**____________________

Program: _______________

Hjälpmedel: Papper, penna, miniräknare och formelsamlingen Beta.
Totalt 16 poäng. För godkänt krävs 10 poäng.

1: Gör följande uppgifter. Ingen motivering krävs! Inom parentes anges hur svaret skall anges.

a) Ge ett exempel på en funktion $f(x) > 0$ så att dess primitiva funktion $F(x)$ är periodisk, dvs att det finns ett tal $a > 0$ så att $F(x + a) = F(x)$ för alla x. [Svara med ett exempel eller “omöjligt”.]

b) Låt $f(x)$ vara en funktion så att dess primitiva funktion är $F(x) = e^{\sin(x)} + C$. Vad är $f(x)$? [Ange $f(x)$ eller “Omöjligt att avgöra”.]

c) Är $\int f^2(x)dx$ monoton, i så fall växande eller avtagande. [Svara med “växande”, “avtagande” eller “inte nödvändigtvis monoton”.]

d) Antag att $f(x)$ är definierad på $\mathbb{R}$, att $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existerar och att $\lim_{x\to\infty} F(x) = 3$ där $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$. Vad är $\lim_{x\to\infty} f(x)$? [Svara med ett tal eller “Omöjligt att avgöra”.]

e) Om $\int f(x)dx = e^{\sin(x)}\cos^2(x) + C$ vad är $\int f(x + 3)dx$? [Svara med en funktion eller “omöjligt att avgöra”.]

f) Låt $p(x)$ och $q(x)$ vara polynom och $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{8}{(x+3)}$. Vilken är den lägsta möjliga graden polynomet $q(x)$ kan ha? [Svara med ett heltal eller “omöjligt att avgöra”.]

g) Givet att $\int h(\sin(x))\cos(x)dx = e^x + C$ för all $|x| < 1$ vad är $\int h(x)dx$ när $|x| < 1/100$? [Svara med en funktion.]

h) Ange en funktion $F(x)$ som inte är en primitiv funktion till någon kontinuerlig funktion $f(x)$. [Ange F eller svara “Omöjligt”.]. **[8poäng]**

Svar: Förklaringar inom parenes är inte nödvändiga för full poäng.

a) Omöjligt ($F' = f > 0$ implicerar att F är strikt växande, dvs $F(x + a) > F(x)$.)

b) $f(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}$ (Enligt definitionen så är $F'(x) = f(x)$.)

c) Växande (Eftersom $F'(x) = f^2(x) > 0$.)

d) 0 (Om säg $\lim_{x\to\infty} f(x) = a \neq 0$. Om $a > 0$ så finns det ett $C_{a/2} > 0$ så att $F'(x) > a/2$ för $xC_{a/2}$ men det innebär att $F \to \infty$. Om $a < 0$ så kommer $F \to -\infty$. Detta visar att den enda möjligheten att $F \to 3$ är om $a = 0$.)

e) $e^{\sin(x+3)}\cos^2(x + 3) + C$ (Inses med en variabelsubstitution $t = x + 3$.)

f) 3

g) $e^{\arcsin(x)} + C$ (Enligt variabelbytesformeln.)

h) $F(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \geq 0 \\ 0 & \text{om } x < 0 \end{cases}$ (Derivatan existerar inte i $x = 0$.)

2: Beräkna $\int \frac{\ln(x)}{x^4}dx$. **[4poäng]**

Svar: Vi gör följande beräkning

$$\int \frac{\ln(x)}{x^4}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{dx^{-3}}{dx}\ln(x)dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{partiell} \\ \text{integration} \end{array} \right\} =$$

$$-\frac{1}{3}\frac{\ln(x)}{x^3} + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^3}\frac{d\ln(x)}{dx}dx = -\frac{1}{3}\frac{\ln(x)}{x^3} + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^4}dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\frac{\ln(x)}{x^3} - \frac{1}{9}\frac{1}{x^3} + C.$$

3: Hitta alla primitiva funktioner till $f(x) = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}$. **[4poäng]**

Svar: Låt $t = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$, då gäller $x = \frac{1}{t^2-1}$ och $dx = -\frac{2t}{(t^2-1)^2}dt$. Detta variabelbyte ger

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx = -\int \frac{2t^2}{t^2-1}dt = -2\int dt - \int \frac{2}{(t+1)(t-1)}dt. \tag{1}$$

Den första integralen i högerledet är trivial

$$-2\int dt = -2t + C = -2\sqrt{\frac{x+1}{x}} + C. \tag{2}$$

För att beräkna den andra integralen så gör vi partialbråksuppdelningen

$$\frac{2}{(t+1)(t-1)} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t-1} = \frac{(a+b)t + (b-a)}{(t+1)(t-1)}.$$

Det följer att $a + b = 0$ och $b - a = 2$, dvs $a = -1$ och $b = 1$. Det följer att

$$-\int \frac{2}{(t+1)(t-1)}dt = \int \frac{1}{t+1}dt - \int \frac{1}{t-1}dt = \ln|t+1| - \ln|t-1| + C = \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C = \tag{3}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \text{använd att} \\ t = \sqrt{\frac{x+1}{x}} \end{array} \right\} = \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\right| + C.$$

Om vi sätter in (2) och (3) i (1) så får vi: **Svar:**

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx = -2\sqrt{\frac{x+1}{x}} + \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\right| + C.$$