Kontrollskrivning 3 (Modul 4) och 4 (Modul 5) SF1602 HT2013

Namn: ______________________________**Personnummer:**__________________

Hemligt Namn (För anonym resultatrapportering): ________________________

Program: ______________

Hjälpmedel: Papper, penna, miniräknare och formelsamlingen Beta.
Totalt 12 poäng per KS. För godkänt krävs 8 poäng.

Kontrollskrivning 3

Uppgift 1 [KS3]:

a) Låt $f(x) = \int_0^{\cos(x)} \sin(t)dt$. Vad är $f'(x)$?

[Ange $f'(x)$, ingen motivering krävs.] **(1 poäng)**

b) Ange en kontinuerlig funktion $f(x)$ på $[2, 3]$ så att $\int_2^3 f(x)dx \geq \int_2^3 |f(x)|dx$.

[Ange $f(x)$ eller svara "omöjligt", ingen motivering krävs] **(1 poäng)**

c) Låt $f(x) = \begin{cases} \sin(x)\cos^2(x) & \text{om } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 3 & \text{om } x > 1. \end{cases}$ vara definierad på $[0, \infty[$. Beräkna $\int_0^x f(t)dt$ för alla $x \geq 0$.

[Fullständig motivering krävs, du får dock fritt referera till kända satser.] **(4 poäng)**

Svar:
a: $-\sin(x)\sin(\cos(x))$ (Analysens huvudsats och kedjeregeln.)
b: Vilken funktion som helst som uppfyller $f(x) \geq 0$ tex. $f(x) = 0$.
c: Eftersom $f(x)$ är styckvis kontinuerlig så är den integrerbar, dvs integralen existerar.
Om $0 \leq x \leq 1$ så

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \sin(t)\cos^2(t)dt = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{-1}{3}\frac{d\cos^3(t)}{dt}dt = \frac{1}{3} - \frac{\cos^3(x)}{3}.$$

Och om $x > 1$ så

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^1 \sin(t)\cos^2(t)dt + \int_1^x t^2 + 3dt = \frac{1}{3} - \frac{\cos^3(1)}{3} + \frac{x^3}{3} + 3x - \frac{1}{3} - 3 = \frac{x^3}{3} + 3x - 3 - \frac{\cos^3(1)}{3},$$

där vi delade integralen i det första steget.

Vårt svar blir således $\int_0^x f(t)dt = \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{\cos^3(x)}{3} & \text{om } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x^3}{3} + 3x - 3 - \frac{\cos^3(1)}{3} & \text{om } x > 1. \end{cases}$

Uppgift 2 [KS3]:

a) Låt $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } -2 \leq x \leq -1 \\ 2 & \text{om } -1 < x \leq 0 \\ -1 & \text{om } 0 < x \leq 1. \end{cases}$

Beräkna $\int_{-2}^1 f(x)dx$. [Ange värdet av integralen, ingen motivering krävs.] **(1 poäng)**

b) Låt $f(x)$ vara en kontinuerlig funktion på $[0, 38]$ så att $F(x) = e^{\cos(x)}\ln(1 + x) + 8$ är en primitiv funktion till $f(x)$. Beräkna $\int_0^\pi f(x)dx$.

[Ange värdet av integralen, ingen motivering krävs.] **(1 poäng)**

c) Avgör om den generaliserade integralen $\int_0^1 \frac{\sin(1/x)}{x^2}dx$ är konvergent.

[Fullständig motivering krävs.] **(4 poäng)**

Svar:
a: 2 (Definitionen av integralen av en trappfunktion.)
b: $\int_0^\pi f(x)dx = F(\pi) - F(0) = e^{-1}\ln(1 + \pi)$
c: Vi betraktar gränsvärdet $\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{\sin(1/x)}{x^2}dx$. Vi beräknar

$$\int_\epsilon^1 \frac{\sin(1/x)}{x^2}dx = \left\{ \text{ substituera } t = \frac{1}{x} \right\} = \int_1^{1/\epsilon} \sin(t)dt = \cos(1) - \cos(1/\epsilon).$$

Där vi använde att om $\frac{1}{x} = t$ så är

1. $-\frac{1}{x^2}dx = dt$.

2. $x = \epsilon$ implicerar att $t = 1/\epsilon$, $x = 1$ implicerar $t = 1$ och att $\int_{1/\epsilon}^{1} = -\int_{1}^{1/\epsilon}$.

Vi vet också att $\lim_{\epsilon\to 0}\cos(1/\epsilon) = \lim_{s\to\infty}\cos(s)$ inte existerar.
Där för så är $\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 \frac{\sin(1/x)}{x^2}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}(\cos(1)-\cos(1/\epsilon))$ inte konvergent.

Kontrollskrivning 4

Uppgift 1 [KS4]:

a) Är $y(x) = x^5 + 3x$ en lösning till följande differentialekvation: $y''(x) + 2y(x) = 2x^5 + 20x^3 + 6x$?

[Svara Ja, Nej eller "Omöjligt att avgöra", ingen motivering krävs.] **(1 poäng)**

b) Skriv ner en första ordningens differentialekvation som varken är linjär eller separabel.

[Ange diff. ekvationen, ingen motivering krävs] **(1 poäng)**

c) Avgör om $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^{3/2}}$ är konvergent eller divergent.

[Fullständig motivering krävs, du får dock fritt referera till kända satser.] **(4 poäng)**

Svar:
a: Ja.
b: $y' + y^2 + y = 0$
c: Vi vill använda Cauchys integralkriterium. För det så behöver vi att $\frac{\ln(x)}{x^{3/2}}$ är avtagande. $D\frac{\ln(x)}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{5/2}} - \frac{3}{2}\frac{\ln(x)}{x^{5/2}} < 0$ då $\ln(x) > \frac{2}{3}$ vilket händer då $x > 2$.
Vi kan därför skatta, för $K \geq 2$

$$\sum_{n=1}^{K}\frac{\ln(n)}{n^{3/2}} = \frac{\ln(1)}{1^{3/2}} + \sum_{n=2}^{K}\frac{\ln(n)}{n^{3/2}} \leq 0 + \int_2^K \frac{\ln(x)}{x^{3/2}}dx.$$

Vi kan skriva den sista integralen som

$$\int_2^K \frac{\ln(x)}{x^{3/2}}dx = -2\int_2^K \ln(x)\frac{dx^{-1/2}}{dx}dx = \{\text{part. int.}\} = \sqrt{2}\ln(2) - 2\frac{\ln(K)}{\sqrt{K}} + 2\int_2^K \frac{1}{x^{3/2}}dx =$$

$$= \sqrt{2}\ln(2) - 2\frac{\ln(K)}{\sqrt{K}} + 2\sqrt{2} - \frac{4}{\sqrt{K}} \to \sqrt{2}(2+\ln(2))$$

då $K \to \infty$. Det följer att integralen är konvergent och därför, enl. Cauchys integralkriterium, att serien är konvergent.

Uppgift 2 [KS4]:

a) Är volymen av rotationskroppen som fås då arean under $\frac{1}{x}$, $0 < x \leq 1$, roteras kring x−axeln ändlig eller oändlig.

[Svara med "ändlig", "oändlig" eller "omöjligt att avgöra", ingen motivering krävs.] **(1 poäng)**

b) Välj konstanter a och b så att det finns en lösning, definierad på $\mathbb{R}$, till $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$ så att $\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$ och $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \infty$.

[Ange a och b, ingen motivering krävs] **(1 poäng)**

c) Hitta en lösning till $y''(x) + y'(x) - 6y(x) = \sin(2x)$ så att $y(0) = y'(0) = 1$.

[Fullständig motivering krävs, du får dock fritt referera till kända satser.] **(4 poäng)**

Svar:
a: Oändlig. (volymen ges av $\int_0^1 \frac{\pi}{x^2}dx$ vilken divergerar eftersom exponenten av x i nämnaren är > 1.)
b: $a = 0$, $b = -1$. (Det karakteristiska polynomet $r^2 - 1$ har rötterna ± 1 så $Ae^x + Be^{-x}$ är en lösning för varje A och B. Dvs $e^x + e^{-x}$ är en lösning som uppfyller kriteriet.)
c: Det karakteristiska polynomet, $r^2 + r - 6$, har rötterna $r = 2$ och $r = -3$. Därför blir den homogena lösningen $y_h = Ae^{2x} + Be^{-3x}$ för några konstanter A och B.
För att hitta partikulärlösningen så ansätter vi att $y_p = C\sin(2x) + D\cos(2x)$ och beräknar

$$y_p'' + y_p' - 6y_p = -(10C + 2D)\sin(2x) - (10D - 2C)\cos(2x),$$

om detta är lika med $\sin(2x)$ så måste $10C + 2D = -1$ och $10D - 2C = 0$. Detta ger $D = -\frac{1}{52}$ och $C = -\frac{5}{52}$.
Vi får således att $y_h + y_p = Ae^{2x} + Be^{-3x} - \frac{5}{52}\sin(2x) - \frac{1}{52}\cos(2x)$.
Vi beräknar $y(0) = A + B - \frac{1}{52} = 1$ och $y'(0) = 2A - 3B - \frac{10}{52} = 1$. Detta ger att $B = \frac{11}{65}$ och $A = \frac{53}{52} - \frac{11}{65}$.
Lösningen vi söker är därför $y(x) = \left(\frac{53}{52} - \frac{11}{65}\right)e^{2x} + \frac{11}{65}e^{-3x} - \frac{5}{52}\sin(2x) - \frac{1}{52}\cos(2x)$.