TRÄNINGS Kontrollskrivning 3 (Modul 4) och 4 (Modul 5) SF1602 HT2013

Namn: ______________________________**Personnummer:**__________________

Hemligt Namn (För anonym resultatrapportering): __________________________

Program: _______________

Hjälpmedel: Papper, penna, miniräknare och formelsamlingen Beta.
Totalt 12 poäng per KS. För godkänt krävs 8 poäng.

Kontrollskrivning 3

Uppgift 1 [KS3]:

a) Antag att $f(x)$ är integrerbar på $[-1,1]$. Hur definieras talet $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.
[Ange definitionen] **(1 poäng)**

b) För vilka tal α är $\int_0^1 |x|^\alpha dx$ konvergent?
[Ange alla α, ingen motivering krävs] **(1 poäng)**

c) Låt $f(x) = \frac{e^{\cos(x)}+7\arctan(x)}{x^2+3}$. Avgör om $\int_1^\infty f(x)dx$ är konvergent eller divergent.
[Fullständig motivering krävs, du får dock fritt referera till kända satser.] **(4 poäng)**

Svar:
a: Enligt definition så är integralens värde $\sup_\Psi I(\Psi)$ där supremum tas över alla trappfunktioner Ψ, dvs funktioner på formen $\Psi(x) = a_i$ för $x \in]x_{i-1}, x_i[$ för $-1 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_k = 1$. Funktionen I är enligt definition $I(\Psi) = \sum_{n=1}^{k}(x_i - x_{i-1})a_i$ om Ψ är som i föregående mening.
b: $\alpha > -1$.
c: Då $\pi/2 > \arctan(x) \geq 0$ för $x \geq 0$ och $e^t > 0$ för alla t så följer det att

$$0 \leq f(x) \leq \frac{e + \frac{7\pi}{2}}{x^2}.$$

En enkel beräkning visar också att

$$\int_1^\infty \frac{e+\frac{7\pi}{2}}{x^2}dx = \lim_{X\to\infty}\int_1^X \frac{e+\frac{7\pi}{2}}{x^2}dx = \lim_{X\to\infty}\left(e + \frac{7\pi}{2} - \frac{e+\frac{7\pi}{2}}{X}\right) == e + \frac{7\pi}{2},$$

där vi använde definitionen av generaliserade integraler och standardgränsvärden.

Då $f(x) \geq 0$ och $f(x)$ är punktvis mindre än en konvergent integral så är $\int_1^\infty f(x)dx$ också konvergent enligt jämförelsesatsen.

Uppgift 2 [KS3]:

a) Låt $f(x) = \int_0^{e^x} \ln(t)dt$. Vad är $f'(x)$?
[Ange f', ingen motivering krävs.] **(1 poäng)**

b) Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[0,2]$ och $\int_0^2 f(x)dx = 8$ finns det då ett tal x_0 så att $f(x_0) = 4$?
[Svara Ja, Nej eller "Omöjligt att avgöra", ingen motivering krävs.] **(1 poäng)**

c) Bestäm det tal $a \in [0,3]$ så att $\int_0^a \frac{(x^2+4)\cos(x)}{(x^2+1)(x+6)}dx$ antar sitt största värde.
[Fullständig motivering krävs.] **(4 poäng)**

Svar:
a: xe^x (Analysens huvudsats och en inre derivata.)
b: Ja (Detta följer direkt av integralkalkylens medelvärdessats.)
c: Låt $F(a) = \int_0^a \frac{(x^2+4)\cos(x)}{(x^2+1)(x+6)}dx$ för $a \in [0,3]$. Då är, enligt analysens huvudsats,

$$F'(a) = \frac{(a^2+4)\cos(a)}{(a^2+1)(a+6)}.$$

Eftersom $(a^2+4) > 0$, $(a^2+1) > 0$ och $(a+6) > 0$ om $a > 0$ så får vi att $F'(a)$ har samma tecken som $\cos(a)$, dvs $F'(a) > 0$ om $\cos(a) > 0$ etc.

Vi kan dra slutsatsen att $F'(a) > 0$, dvs $F(a)$ är växande, för $0 \leq a < \pi/2$, och $F'(a) < 0$, dvs $F(a)$ är avtagande, för $a \in]\pi/2, 3]$. Punkten $a = \pi/2$ är stationär. Vi drar slutsatsen att maximum inträffar i $a = \pi/2$.

Kontrollskrivning 4

Uppgift 1 [KS4]:

a) Låt $(x(t), y(t))$, $0 \leq t \leq 1$, vara en parameterframställning av en kurva Γ i planet, $x(t)$ och $y(t)$ antas vara kontinuerligt deriverbara i parameterintervallet $[0,1]$. Hur definieras längden av kurvan?

[Ange definitionen] **(1 poäng)**

b) Hur många av följande serier är konvergenta: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{(n+3)^4}$, $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-5}+12}$ och $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$?

[Svara med ett tal 0,1,2,...,5, ingen motivering krävs] **(1 poäng)**

c) Bestäm ytan som fås då grafen av $f(x) = e^x$, $0 \leq x \leq 1$ roteras ett varv kring $x-$axeln.

[Fullständig motivering krävs, du får dock fritt referera till kända satser.] **(4 poäng)**

Svar:
a: $\int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$.
b: 3 ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n}$ och $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-5}+12}$ divergerar.)
c: Rotationsytan ges av integralen $\int_0^1 f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx = \int_0^1 e^x\sqrt{1+e^{2x}}dx = \int_1^e \sqrt{1+t^2}dt$ efter variabelbytet $e^x = t$. Vi vet att

$$\int_1^e \sqrt{1+t^2}dt = \left[\frac{1}{2}t\sqrt{t^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|\right]_{t=1}^{t=e} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e\sqrt{e^2+1} - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+\sqrt{t^2+1}}{1+\sqrt{2}}\right|$$

vilket är vårt svar.

Uppgift 2 [KS4]:

a) Ange två konstanter a och b så att alla lösningar till $y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$ uppfyller $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.

[Ange konstanterna, ingen motivering krävs.] **(1 poäng)**

b) Kan man skriva lösningen till $y'(x) + (y(x))^2 = \sin(x)$ som $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ där y_h är en allmän lösning till den homogena ekvationen $y'(x) + (y(x))^2 = 0$ och $y_p(x)$ en lösning till $y_p'(x) + (y_p(x))^2 = \sin(x)$.

[Svara Ja, Nej eller "omöjligt att avgöra", ingen motivering krävs.] **(1 poäng)**

c) Lös differential ekvationen $xy'(x) + 3y(x) = \ln(x)$, $x > 0$ och $y(1) = 1$.

[Fullständig motivering krävs, du får dock fritt referera till kända satser.] **(4 poäng)**

Svar:
a: $a = 3$ och $b = 2$ (Detta ger det karakteristiska polynomet $r^2 + 3r + 2$ vilket har rötterna -1 och -2 så $y(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x}$ som går till noll då $x \to \infty$ oavsett vad A och B är.)
b: Nej. (Ekvationen är inte linjär.)
c: Vi skriver differentialekvationen på standardformen $y' + \frac{3}{x}y = \frac{\ln(x)}{x}$ vilket inte orsakar några problem då $x > 0$. Enligt formeln för lösningar till linjära första ordningens differential ekvationer så är lösningen på formen

$$y(x) = e^{-G(x)}\left(\int e^{G(x)}\ln(x)dx + C\right)$$

där $G(x) = \int \frac{3}{x}dx = 3\ln(x)$. Detta ger att $y(x) = x^{-3}\int x^3\ln(x)dx + Cx^{-3}$. Det återstår därför att välja C och beräkna

$$\int x^3\ln(x)dx = \frac{1}{4}\int \frac{dx^4}{dx}\ln(x)dx = \{\text{partiell int.}\} = \frac{x^4\ln(x)}{4} - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{4x^4\ln(x) - x^4}{16}.$$

Vi får således lösningen

$$y(x) = \frac{4x\ln(x) - x}{16} + Cx^{-3}$$

där C ska väljas så att $y(1) = -\frac{1}{16} + C = 1$ dvs $C = \frac{17}{16}$. Lösningen blir därför

$$y(x) = \frac{4x\ln(x) - x}{16} + \frac{17}{16x^3}$$

vilket är vårt svar.

Slut.