

Kursens Kortfrågor med Svar SF1602 Diff. Int.

Allmänt om kortfrågor: Kortfrågorna är ett viktigt sätt för er att engagera matematiken. De kommer att dyka upp på kontrollskrivningar. Syftet är att ni ska gå till definitionerna, gå till satserna och försöka lära er tänka på dessa på ett intuitivt sätt. Jag tror inte att det finns en given mängd regler för att lösa dessa uppgifter. Men vissa angreppssätt är förekommer ofta.

Det första är att gå till definitionerna och se vad koncepten vi använder betyder - vissa konceptuppgifter följer av en direkt tillämpning av definitionerna.

Det andra angreppssättet är att titta på de satser vi bevisar eller står i boken. Ofta finns det en sats som säger något liknande (eller omvänt) som kortuppgiften. Om vi förstår satserna och alla antaganden som görs och varför de görs så kommer vi att kunna lösa dessa konceptuppgifter.

Det tredje är att skapa ett motexempel. Ofta så bygger motexemplet på satser och satserna ger en indikation på hur motexemplet skall konstrueras. Satserna är sanna så motexemplet måste rikta in sig på det som saknas i kortuppgiften men finns med som antagande i satsen.

Det fjärde angreppssättet är att skissa en graf. En graf kan säga mer än 1000 ord!

Det sista angreppssättet är att försöka tolka ekvationerna intuitivt. Det mesta i den matematiska analysen är utvecklat för att används i fysiken så om vi förstår en tillämpning (i form av avstånd eller hur en graf ritas) så kan vi förstå problemet.

Att kunna lösa kortuppgifter hjälper oss även att förstå satser och ger oss en metod att kolla om en viss uppgift gäller. T.ex. så var det någon som på en inlämningsuppgift använde följande beräkning: " $x - \sin(x) \geq 0 \geq -\frac{1}{6}x^3$ då $x \geq 0$ vilket implicerar att $|\sin(x) - x| \leq \left|\frac{x^3}{6}\right|$ dvs att $-\frac{x^3}{6} \leq \sin(x) - x \leq \frac{x^3}{6}$ så $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x)$. Om vi kallar $A = x - \sin(x)$ och $B = \frac{x^3}{6}$ så skulle slutledningen (första halvan) bli "Om $A \geq 0 \geq -B$ då $-A \geq -B$." Om man räknat tillräckligt mycket kortuppgifter så ser man direkt att en sådan slutledning inte kan stämma tex om $A = 2$ och $B = 1$. Så om man tänkt tillräckligt på matten och på vilka härledningar som är korrekta så kommer man undgå att göra enkla fel i komplicerade bevis.

1 Modul 1.

1. Vi vet att, för säg alla $q > 0$ och $a > 1$, $\frac{x^q}{\ln(x)} \rightarrow \infty$ och att $\frac{a^x}{x^q} \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$. Så x^q , växer mot oändligheten snabbare än $\ln(x)$ men a^x växer snabbare än x^q . Men vilken funktion, om någon, går mot oändligheten snabbast av alla funktioner?

Svar: Nej!

Tankesätt: Om det fanns en sådan funktion $f(x)$ så skulle $g(x) = xf(x)$ växa mot oändligheten snabbare än $f(x)$ eftersom $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$. Dvs g går mot oändligheten snabbare än f så f är inte den snabbast växande funktionen.

Lösningsprincip: Vi antar att påståendet är sant och ser om vi kan härleda en motsägelse.

2. Antag att $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0$ följer det att $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{f(x)} = \infty$?

Svar: Nej!

Lösningsprincip och tankesätt: För det första så är det inte säkert att $\frac{1}{f(x)}$ är definierad för $f(x) = 0$ för vissa x .

Men även om $f(x)$ är definierad så är inte slutledningen nödvändigtvis sann. Om $f(x) < 0$ för alla x så kommer $\frac{1}{f(x)} < 0$ och enligt regeln för olikhet i övergång av gränsvärde så kan en negativ funktion inte ha ett positivt gränsvärde.

3. Antag att $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \infty$ följer det att $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{f(x)} = 0$?

Svar: Ja!

4. Låt $f(x)$ och $g(x)$ vara polynom. Om $f(\alpha) = \beta$ och $g(\beta) = 0$ finns det då ett polynom $q(x)$ så att

$$g \circ f(x) = (x - \alpha)q(x)?$$

Svar: Ja!

Tankesätt och lösningsprincip: Högerledet är ett polynom men det är också vänsterledet då sammansättningen av två polynom är ett polynom. Enligt faktorsatsen så kan polynomet i högerledet, dvs $g \circ f(x)$, skrivas som i vänsterledet om α är ett nollställe. Men $g \circ f(\alpha) = g(\beta) = 0$ enligt våra antaganden och definitionen av sammansättning av två funktioner. Så existensen av $q(x)$ följer av faktorsatsen.

Observera att det här är en ganska komplicerad uppgift i det att vi bevisar något från definitionen av sammansättning, faktorsatsen, och två antaganden om värdena till f och g . Men om man förstärkt definitionerna och satsen så blir uppgiften väldigt enkel och lösbar på ett par sekunder.

5. Finns det ett polynom $q(x)$ så att

$$e^{x^2-1} - 1 = (x - 1)q(x)?$$

Svar: Nej!

Tankesätt och lösningsprincip: Högerledet är ett polynom men vänsterledet är det inte så vi kan inte ha likhet. Poängen med den härledda uppgiften är att lura de som inte tänker på antagandena i satserna. Uppgiften är nästan samma som föregående och argumentet går nästan igenom - förutom att faktorsatsen gäller bara för polynom så vi kan inte applicera den på funktionen $e^{x^2-1} - 1$.

6. Är $\frac{113 \times 112 \times 111 \times \dots \times 53 \times 52}{2 \times 3 \times \dots \times 61 \times 62}$ ett heltal?

Svar: Ja!

Tankesätt och lösningsprincip: Uttrycket är $\binom{113}{62}$ dvs på hur många sätt man kan välja 62 personer ur en grupp om 113. Vilket naturligtvis är ett heltal. Om man kan definitionen av $\binom{113}{62}$ och dess betydelse så blir uppgiften lätt. Att sitta och förkorta eller beräkna uttrycket explicit skulle dock vara ganska tidsödande.

7. Vilka av följande påståenden är sanna för varje funktion $f(x)$ definierad på de reella talen

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ implicerar att $\lim_{x \rightarrow 0} f(2x) = 0$,
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ implicerar att $\lim_{x \rightarrow \infty} f(2x) = 0$,
- c) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$ implicerar att $\lim_{x \rightarrow 3} f(2x) = 0$?

Svar:

- a) Ja (gör substitutionen $t = 2x$ och se att det är samma gränsvärde som beräknas)
- b) Ja (som i a)

c) Nej (gör substitutionen $t = 2x$ och få $\lim_{t \rightarrow 6} f(t)$ så om slutsatsen vore sann så skulle det implicera att varje funktion som var kontinuerlig och lika med noll i $x = 3$ skulle också vara kontinuerlig och lika med noll i $x = 6$ vilket uppenbarligen inte kan vara sant (tex för $f(x) = x - 3$ vilken inte är lika med noll i $x = 6$).

Tankesätt och lösningsprincip: Den här uppgiften kollar om man förstår vad gränsvärdet betyder och om man kan göra enkla variabel substitutioner.

8. Hitta en begränsad funktion $f(x)$ så att dess invers $f^{-1}(x)$ är definierad på $\mathbb{R}$, dvs. $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

Svar: Nej!

Tankesätt och lösningsprincip: Inversens definitionsmängd är samma sak som värdemängden till funktionen. Men om funktionen är begränsad så är värdemängden begränsad vilket är samma sak som att definitionsmängden för inversen är begränsad. Men om definitionsmängden till inversen är begränsad så kan den inte vara hela $\mathbb{R}$.

Om man kan definitionerna och enkla satser om värde och definitionsmängd så blir uppgiften lätt.

9. Är $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$? Om inte så hitta ett motexempel.

Svar: Nej! Ta tex $f(x) = \sqrt{x}$ definierad på $x > 0$ då är inversen $f^{-1}(x) = x^2$ men $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Tankesätt och lösningsprincip: Jag tror att det enklaste sättet att se detta är att rita en graf. Vi vet att inversens graf är speglingen i linjen $x = y$ (dvs vi använder den teori vi har). Resonera utifrån detta.

10. Vilket värde, om något, antar dessa gränsvärden? Gissa, du behöver inte bevisa dina svar med ϵ -definitionen.

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\pi}{x^3} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7 \ln(x)^2}{3^x + 14} & \lim_{x \rightarrow 3} |x| \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^7 + x^3 - 48x}{2x^7 - 9x^3} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(1/x)}{\sqrt{x}} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \sin(x) + 8}{|x| + 17} \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+4)(x-3)}{x-3} & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2}{5(x-3)} & \lim_{x \rightarrow 5} \cos(1/(x-5)) \end{array}$$

Svar:

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\pi}{x^3} = 0 & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 7 \ln(x)^2}{3^x + 14} = 0 & \lim_{x \rightarrow 3} |x| = 3 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^7 + x^3 - 48x}{2x^7 - 9x^3} = 2 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(1/x)}{\sqrt{x}} = 0 & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \sin(x) + 8}{|x| + 17} \text{ odefinierad} \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+4)(x-3)}{x-3} = 7 & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2}{5(x-3)} = 0 & \lim_{x \rightarrow 5} \cos(1/(x-5)) \text{ odefinierad} \end{array}$$

Alla dessa är standardgränsvärden och jättelätta om man kan satserna för gränsvärdesberäkning (summa, kvot, produktregeln).

11. För vilka funktioner f är $f(\sin(x))$ en funktion?

Svar: Den här är lite knepig på ett sätt. För en funktion kommer med en definitionsmängd. Så $f(\sin(x))$ är en funktion så länge definitionsmängden inte är tom, dvs för alla $f(x)$ så att $D_f \cup [-1, 1] \neq \emptyset$.

12. Gäller följande utsaga: "Om $|f(x-2) - 3| \leq |x|$ så följer det att $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 3$?"

Svar: Ja!

Tankesätt och lösningsprincip: Rita grafen av $f(x)$ och rita in olikheten $|f(x-2) - 3| \leq |x|$. Man kan också resonera kring $\epsilon - \delta$ definitionen för att göra ett riktigt bevis. Men grafen räcker för att övertyga om satsens sanning.

13. Om $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ följer det då att $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$?

Svar: Nej!

Tankesätt och lösningsprincip: För det första så är påståendet inte särskilt troligt. Varför skulle alla funktioner som är stora för stora x vara små för små x ? Eftersom vi inte tror på påståendet så skapar vi ett motexempel, tex $f(x) = e^x$.

14. Antag att $a > b > 1$ och $x > 0$ gäller det då att $a \log(x) > b \log(x)$?

Svar: Nej (Du skall kunna alla räknelagar för logaritmer.)

15. Antag att $f(x)$ är begränsad från ovan av B , dvs. att $f(x) \leq B$ följer det att $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \leq 3$ förutsatt att gränsvärdet existerar?

Svar: Nej.

Tankesätt och lösningsprincip: Den här frågan är bara dum. Våra antaganden har ingenting med 3 att göra så varför skulle 3 hoppa ut i slutsatsen? Vi använder logik för att knyta antaganden till slutsatser i matematiken. Men om våra antaganden inte har någon 3:a i sig så skulle det vara mycket förvånande om slutsatsen hade det (dock inte omöjligt, tex så finns det bara 5 Platonska kroppar och den satsen har en förvånande 5:a i sig utan att det finns någon 5:a i satsens antaganden).

Vi tror därför inte på påståendet och konstruerar lätt ett motexempel. Tag tex $B = f(x) = 4$ så kommer $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4 > 3$. Observera att om vi hade lagt till ett extra antagande att $B \leq 3$ så skulle påståendet bli sant på grund av olikhet i övergång av gränsvärde satsen.

16. Gäller följande: "Om $f(x)$ inte är jämn så är $f(x)$ udda."?

Svar: Nej, tex så är $f(x) = 2 + x$ varken jämn eller udda.

17. Givet en funktion f definierad på $] -1, 1[$ kan man skriva f som summan av en jämn och udda funktion?

Svar: Ja!

Tankesätt och lösningsprincip: Den här är lite knepig att se direkt. Men vi kan skriva varje funktion

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

där den första kvoten är jämn och den andra är udda.

18. Antag att f är en udda funktion och att $f(3) = 16$, vad är $\int_{-3}^3 f(x) dx$?

Svar: 0

Tankesätt och lösningsprincip: Det här är en jättevanlig princip att utvärdera integraler för udda funktioner. Faktum är att $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ för alla udda och integrerbara funktioner som är definierade på $[-a, a]$. Rita grafen och se att den ytan som är över x -axeln och den under x -axeln är lika.

19. Om f är en udda funktion vad är $f(0)$?

Svar: 0

Tankesätt och lösningsprincip: Vi går direkt till definitionen av udda funktioner (som så ofta så handlar kortfrågor om att gå till definitionerna). Om f är udda så är $f(0) = -f(-0) = -f(0)$. Dvs $2f(0) = 0$ och slutsatsen följer.

20. Vilka av följande påståenden är sanna om $f(x)$ är strängt växande?

a) $f(-x)$ är strängt avtagande.

b) $f(x)^2$ är strängt avtagande?

Svar:

a) Sant.

b) Falskt.

21. Låt $f(x)$ vara en funktion definierad på $[-1, 1]$ vilka av följande påståenden är sanna?

a) $f \circ \sin(x)$ är periodisk?

b) $\sin \circ f(x)$ är periodisk?

Svar:

a) Sant

b) Falskt

22. Låt $-1 \leq \kappa \leq 1$ och x ett godtyckligt reellt tal. Finns det tal a och b så att $a^2 + b^2 = 1$ och

$$a \sin(x) + b \cos(x) = \kappa?$$

Svar: Ja (detta är bara omskrivning av sin och cos med hjälpvinkel)

23. Finns det reella tal a och k så att ekvationen $ax + k = \tan(x)$ inte har någon lösning?

Svar: Nej (rita grafen och använd satsen om mellanliggande värden)

24. Vad är följande gränsvärde: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cosh(x^3)}{\sinh(x^3)}$?

Svar: 0 (Jag vill i princip bara att ni ska kunna definitionerna av $\sinh(x)$ och $\cosh(x)$. Då blir detta ett standardgränsvärde.)

25. Gäller följande påstående: "Om gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ inte existerar så existerar inte $\lim_{x \rightarrow c} f^2(x)$."?

Svar: Nej, det gäller inte!

Tankesätt: (Detta är inget bevis!) Vi tror inte på påståendet och försöker därför att konstruera ett motexempel. Om vi ska konstruera ett motexempel till ovanstående så behöver vi en funktion f så att $\lim_{x \rightarrow c} f^2(x)$ existerar samtidigt som $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ inte existerar.

Eftersom kvadraten 'dödar' minustecken så behöver vi hitta någon funktion som ändrar tecken nära punkten c . Vi antar att Vi kan tex välja

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \geq c \\ -1 & \text{om } x < c. \end{cases}$$

Då är f diskontinuerlig i c men $f^2(x) = 1$ vilken naturligtvis har ett gränsvärde. Rita gärna en graf!

Lösningsprincip: Hitta ett motexempel!

26. Antag att $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$ och $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$, vad är $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$?

Svar: Odefinierad!

Tankesätt: (Detta är inget bevis!) Vi vet att för alla tal x som är nära men större än 1 så är $f(x) \approx 2$ (det är ju detta som $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$ betyder) men för tal nära men mindre än 1 så gäller $f(x) \approx 1$ (vilket är betydelsen av $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$).

Naturligtvis så finns det då inget tal A så att $f(x)$ är nära det talet när x är nära 1 (vilket är betydelsen av $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = A$). Ett sådant tal skulle ju behöva uppfylla både $A = 2$ och $A = 1$.

Observera att detta resonemang bygger på tolkningar av definitioner!

Lösningsprincip: Gå till definitionen och tolka den!

27. Om $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$ följer det då att $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2 \lim_{x \rightarrow 3} g(x)$?

Svar: Nej!

Tankesätt: (Detta är inget bevis!) Om $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2A \neq 0$ och $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = A \neq 0$ så skulle $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$ enligt kvotregeln. Men kvotregeln antar att $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2A$ och $2 \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = A$. När vi vill visa motsatsen så vittnar det antagandet om vad som kan gå fel.

Vi vill konstruera ett motexempel och för det så räcker det med att välja en funktion $g(x)$ så att $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ inte existerar, tex $g(x) = \cos(1/(x-3))$, och sen väljer vi $f(x) = 2g(x)$. Då är $f(x)/g(x) = 2$ men vi kan inte ens tillskriva $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ eller $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ några värden.

Lösningsprincip: Vi konstruerar ett motexempel. Men vi tittar även på de antaganden vi gör i en sats. Ett bra sätt att se till att man förstår en sats är att ta bort ett antagande och försöka hitta ett motexempel till motsvarande sats utan det antagandet.

28. Antag att det existerar ett $\delta > 0$ så att $|f(x) - \pi| < \frac{1}{100}$ för alla x så att $|x - 2| < \delta$. Följer det att det finns ett $\delta > 0$ så att $|f(x) - \pi| < \frac{1}{10}$ för alla x så att $|x - 2| < \delta$?

Svar: JA!

Tankesätt: (Detta är inget bevis!) Absolutbeloppet är ett avstånd. Så $|x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - \pi| < \frac{1}{100}$ betyder att om x är nära 2 så är $f(x)$ nära π , inom 1/100 från π . Men om då måste ju $f(x)$ vara inom 1/10 från π .

Tänk den student som är inom 1/100 mil från puben ($f(x)$ avståndet från pubben som ligger på adressen π) när klockan är tillräckligt nära 2. Är det då inte uppenbart att han är inom 1/10 mil från puben då klockan är tillräckligt nära 2?

Lösningsprincip: Vi tolkar uttrycken i vardagstermer.

29. Antag att det existerar ett $\delta > 0$ så att $|f(x) - 3| < \frac{1}{100}$ för alla x så att $|x - 2| < \delta$. Följer det att det finns ett $\delta > 0$ så att $|f(x) - 2| < \frac{1}{10}$ för alla x så att $|x - 2| < \delta$?

Svar: Nej!

Tankesätt: (Detta är inget bevis!) Antag att samma student senare beslutar sig för att dricka på en annan pub som ligger på adressen 3. Antag att vi vet att han är inom 1/100 mil från pubben då klockan är nära 2. Dvs. om $|x - 2| < \delta$ så $|f(x) - 3| < \frac{1}{100}$. Kan han då vara inom 1/10 mil från en annan pub på adressen 2?

I andra ord, om Kalle alltid stapplar omkring inom hundra meter från konsulatet vid 2 tiden så kan han inte stappla omkring inom en kilometer från Mosebacke vid samma tid. Eftersom Mosebacke och konsulatet är mer än $1/100 + 1/10$ mil ifrån varandra.

30. Antag att det för varje $\delta > 0$ finns ett $\epsilon_\delta > 0$ så att $|f(x) + 2| < \epsilon_\delta$ för alla x så att $|x + 7| < \delta$. Följer det att $\lim_{x \rightarrow -7} f(x) = -2$?

Svar: Nej!

Tankesätt: (Detta är inget bevis!) Det är väldigt viktigt att vi först väljer ϵ och sen δ_ϵ i definitionen av gränsvärde. Om vi väljer δ först så kan vi, för varje begränsad funktion f , bara välja $\epsilon_\delta =$ det största värdet $|f(x) + 2|$ antar då $|x + 7| < \delta$. Detta skulle innebära att alla begränsade funktioner är kontinuerliga!

Lösningsprincip: Gå till och tolka definitionen.

31. Har $x^3 + 78x^2 - 13x + 16 = 0$ någon lösning? Varför eller varför inte?

Svar: JA!

Tankesätt: (Detta är inget bevis!) Vi vet att polynom är kontinuerliga. Dessutom så gäller $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 + 78x^2 - 13x + 16 = \infty$ så om x är stort, säg $x > C_1$, så är polynomet positivt. Och då $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 78x^2 - 13x + 16 = -\infty$ så är polynomet negativt då x är mycket mindre än noll, säg $x < -C_{-1}$.

Observera att detta följer av definitionen, om $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ så finns det ett $C_1 > 0$ så att $f(x) > 1 > 0$ om $x > C_1$.

Men enligt satsen för mellanliggande värden så måste det finnas ett $x_0 \in]-C_{-1}, C_1[$ så att $x_0^3 + 78x_0^2 - 13x_0 + 16 = 0$.

Lösningsspricnip: Detta är sammansättningen av tre enkla satser, "polynom är kontinuerliga", "standardgränsvärde" och "Satsen om mellanliggande värden". Satserna är enormt viktiga för matematiken och vi måste kunna dem väldigt väl.

32. Antag att $f(x) > g(x)$ för alla $x \in (0, 1)$. Följer det att $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) > \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$?

Svar: Nej!

Tankesätt: (Detta är inget bevis!) Motexempel: $f(x) = 1 - x$ och $g(x) = 0$. Om man tittar på satsen "Regeln för gränsovergång i olikhet" (Sats 5 på sidan 141 i Persson-Böjers) så ser man att det som skiljer den här uppgiften från satsen är att vi har " $<$ " men satsen har " $\leq$ ". Man ska alltid, när man läser en sats, försöka se om de antaganden som görs är nödvändiga. Har man gjort det så blir den här uppgiften enkel.

Lösningsspricnip: Vi tittar på en närliggande sats, hittar motexempel. Det kan även hjälpa att rita en graf.

33. Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på $[0, 1)$. Vilka av följande gränsvärden existerar garanterat:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$?

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$?

c) $\lim_{x \rightarrow 1/2} f(x)$?

b) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{f(x)}{|f(x)|}$?

Svar: a) JA, b) NEJ, c) JA, d) NEJ

Tankesätt: (Detta är inget bevis!) Enligt definitionen för kontinuerliga funktionen så följer a) och c). För b) så hittar vi motexemplet $\cos(1/(x-1))$ (vi diskuterade detta noga på föreläsningen). I d) hittar vi motexemplet $f(x) = x - \frac{1}{2}$ vilket byter tecken i $x = 1/2$.

34. Om $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ vad är $\lim_{x \rightarrow c} \sin(f(x))$?

Svar: Vi kan inte avgöra. Det beror på $f(x)$.

Tankesätt: (Detta är inget bevis!) Om $f(x) = 1/|c-x|$ så är gränsvärdet odefinierat (gör substitutionen $t = 1/|c-x|$ i $\lim_{x \rightarrow c} \sin(f(x))$). Men om tex $c = 0$ och

$$f(x) = 2\pi n \quad \text{om} \quad \frac{1}{n+1} < |x| \leq \frac{1}{n}$$

så kommer $\sin(f(x)) = 0$ och gränsvärdet existerar.

Detta kan vara lite knivigt att komma på första gången man ser det. Men egentligen så är det ganska enkelt vi vet att $\sin(2\pi n) = 0$ så det finns värden på x som går mot oändligheten och $\sin(x) = 0$ för de värdena så om värdemängden till f bara innehåller dessa värden så kommer $\sin(f(x)) = 0$.

På samma sätt så kan vi naturligtvis hitta funktioner $f(x)$ så att $\lim_{x \rightarrow c} \sin(f(x))$ så att gränsvärdet blir varje tal mellan -1 och 1 .

35. Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga på $[-3, \infty)$ vilka av följande gäller

- a) $f(x) + g(x)$ är kontinuerlig.
- b) $f(x)g(x)$ är kontinuerlig.
- c) $\frac{f(x)}{g(x)}$ är kontinuerlig.

Svar: a) och b) är sanna c) är falsk

Tankesätt: (Detta är inget bevis!) a) och b) följer av, vad som borde vara en sats men istället är, de första stycket på sidan 150 i Persson-Böjers. Del c) är falsk om $f(x) = 0$ för något x .

2 Modul 2.

1. Finns det någon funktion $f(x)$ definierad på $[0, 1]$ så att $f'(x) \geq 0$ för alla x och f är växande? Är alla sådana f strikt växande?

Svar: Ja, enligt medelvärdessatsen så är $f(x)$ växande på ett intervall $[a, b]$ om $f'(x) \geq 0$ för alla $x \in [a, b]$. Men f är inte nödvändigtvis strikt växande då funktionen $f(x) = 1$ uppfyller $f'(x) = 0 \geq 0$ utan att vara strikt växande.

2. Om $f \geq g$ följer det att $f' \geq g'$?

Svar: Nej (Motexempel $f(x) = 0$ och $g(x) = -e^{-x}$.)

3. Antag att $f(x)$ är kontinuerlig i en punkt x^0 . följer det att f är deriverbar i x^0 ?

Svar: Nej (Motexempel $x^0 = 0$ och $f(x) = |x|$. Detta visar att deriverbarhet är starkare än kontinuitet eftersom "deriverbar *Rightarrow* kontinuerlig" men inte omvänt.)

4. Om $f'(x) > g'(x)$ för alla x följer det att $f(x) > g(x)$?

Svar: Nej (På samma sätt som för två uppgifter sen. Observera att derivatan anger förändring av funktionen men inte storleken.)

5. Om $f(x) > 0$ finns det någon funktion g så att $\frac{df(x)g(x)}{dx} = \sin(2x)$?

Svar: Ja (ta $g(x) = \frac{\sin(2x)}{2f(x)}$.)

6. Antag att f och g är deriverbara funktioner så att $f(x) \geq g(x)$ för alla x och för någon punkt x_0 så gäller $f(x_0) = g(x_0)$. Vad kan man säga om relationen mellan derivatorna $f'(x_0)$ och $g'(x_0)$?

Svar: $f'(x_0) = g'(x_0)$ (Rita grafen av f och g eller använd att $h'(x_0) = 0$ vid maxpunkten x_0 för $h(x) = f(x) - g(x)$.)

7. Om $f(x)$ är kontinuerlig på $] -1, 1[$ kommer f att antaga ett maximum på det intervallet?

Svar: Inte nödvändigtvis. (Vi har en sats som säger att kontinuerliga funktioner nödvändigtvis antar sitt maxima på slutna och begränsade intervall. Här är intervallet inte slutet så vi kan inte använda den satsen. Istället så kan vi konstruera ett motexempel tex $f(x) = \frac{1}{1-x}$ som inte antar något maximum på det givna intervallet.)

8. Antag att $f(x)$ är en funktion definierad på $[1, -1]$ och $f(-1) = -1$, $f(1) = 1$ existerar det då ett $x_0 \in [-1, 1]$ så att $f(x_0) = 0$?

Svar: Nej (Enligt satsen om mellanliggande värden så är detta sant för kontinuerliga funktioner. Så när vi konstruerar ett motexempel så kan måste det vara en diskontinuerlig funktion. Tex så är $f(x)$? $\begin{cases} -1 & \text{om } x > 0 \\ 1 & \text{om } x < 0 \end{cases}$ ett motexempel.)

9. Låt $f(x)$ vara en deriverbar funktion på $[-1, 1]$. Existerar det någon funktion g så att $g'(x) = f'(x)$ och $g(0) = 0$?

Svar: Ja (tex kan vi välja $g(x) = f(x) - f(0)$. Observera att detta är lite av principen vi använder när vi ser till att lösningen till en diff ekvation antar initialdata.)

10. Om $f'(x) > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$ följer det att $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$?

Svar: Nej (Observera att den här uppgiften föregriper generaliserade integraler eftersom $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow \infty} \int_0^X f'(x)dx - f(0)$ om något av gränsvärdena existerar. Så frågan blir finns det någon strikt positiv funktion $f'(x)$ så att den generaliserade integralen $\int_0^\infty f'(x)dx$ existerar. Svaret är naturligtvis "Ja". Välj tex $f(x) = -e^{-x}$ så $f'(x) = e^{-x}$.)

11. Antag att $f(x)$ är deriverbar på $[0, \infty)$ och att $f'(x) \geq 1$. Kommer $f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$?

Svar: Ja (Enligt differentialkalkylens medelvärdessats så kommer $f(x) - x$ att vara växande så $f(x) \geq f(0) + x \rightarrow \infty$ så $f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$.)

12. Antag att $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara på $[0, \infty)$, $f'(x) \geq 1$ och $g'(x) = 2f'(x)$. Vad är $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$?

Svar: $\frac{1}{2}$ (Observera att $g(x) - g(0) = 2(f(x) - f(0))$ så $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(0) - 2f(0) + 2f(x)} \frac{1}{2 + \frac{g(0) - 2f(0)}{f(x)}}$. Eftersom $f(x) \rightarrow \infty$ enligt föregående uppgift så följer det lätt att det sökta gränsvärdet är $\frac{1}{2}$.)

13. Rita en sketch av Newton-Rappsons metod för en konvex funktion $f(x)$. Kan man dra slutsatsen att lösningsapproximationerna $x_2, x_3, x_4, \dots$ är antingen ökande eller minskande?

Svar: Sekvensen $x_2, x_3, x_4, \dots$ kommer att vara antingen ökande eller minskande.

14. Kan en konvex funktion $f(x)$ ha en inflexionspunkt?

Svar: Nej (titta på definitionen)

15. Ge ett allmänt uttryck för alla funktioner som är samtidigt konvexa och konkava.

Svar: $ax + b$.

16. Antag att $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ är en konvex funktion på $\mathbb{R}$. Vad är a ?

Svar: $a = 0$ ($f''(x) = 6ax + 2b$ så om $f''(x) \geq 0$ så är $a = 0$ (och $b \geq 0$).)

3 Modul 3.

1. Om $f(x) \geq 0$ kommer $\int f(x)dx$ att vara växande?

Svar: Ja ($D \int f(x)dx = f(x) \geq 0$ och om derivatan är icke negativ så är funktionen växande.)

2. Om $f(x)$ är deriverbar och avtagande kommer $\int f(x)dx$ att vara konvex?

Svar: Inte nödvändigtvis ($D^2 \int f(x)dx = f'(x) \leq 0$ så $\int f(x)dx$ är konvex endast om $f'(x) = 0$, dvs om f är konstant.)

3. Om $\int f(x)dx$ är konstant kommer $f'(x) = 0$?

Svar: Ja (Faktum är att om $\int f(x)dx$ är konstant så är $0 = D \int f(x)dx = f(x)$ så $f(x) = 0$.)

4. Jag har tidigare sagt att om vi vet något om en funktion så vet vi något om inversen. Nu så är derivatan invers till den primitiva funktionen. Vilka regler för derivatan motsvarar partiell integration och variabelsubstitution?

Svar: Partiell integration $\Leftrightarrow$ produktregeln. Variabelsubstitution $\Leftrightarrow$ kedjeregeln.

5. Kan en funktion ha oändligt många lokala maximum punkter?

Svar: Ja (Tex $\cos(x)$ eller $\sin(1/x)$ är exempel.)

6. Kan vi hitta polynom, $p(x)$ och $q(x)$, så att

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{p(x)}{x+1} + \frac{q(x)}{x+2}?$$

Svar: Nej. (Observera att höerledet har en singularitet i $x = -3$.)

7. Om $f(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$ kommer då dess primitiva funktion $F(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$?

Svar: Ja.

8. Om $f(x) \rightarrow c > 0$ då $x \rightarrow \infty$ kommer då dess primitiva funktion $F(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow \infty$?

Svar: Ja.

9. Om $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$ kommer då dess primitiva funktion $F(x) \rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 1$?

Svar: Nej. (Tex så kommer derivatan av $\sqrt{|x-1|} \frac{x-1}{|x-1|}$ att gå till oändligheten men inte dess integral.)

10. **(Elakt tal)** Om $\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \infty$ kommer då $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$?

Svar: Nej. (Det här talet är ganska elakt men ett motexempel till påståendet är $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}(1 + \cos(1/(x-1)^2))$.)

11. Om $F(x)$ är en positiv konstant vad är $f(x)$?

Svar: $f(x) = 0$.

12. Om $f(x)$ är begränsad kommer $\int f(x)dx$ att vara kontinuerlig? Deriverbar?

Svar: Per definition så är derivatan av $\int f(x)dx$ lika med $f(x)$ så den existerar. Eftersom derivatan existerar så är den primitiva funktionen kontinuerlig. Men när vi börjar tala om integraler så kommer vi att ha vissa integrerbara funktioner vars integral inte är deriverbar. Men om f är begränsad så kommer integralen alltid att vara kontinuerlig.

4 Modul 4.

1. Låt $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \text{ är rationellt} \\ 0 & \text{om } x \text{ inte är rationellt} \end{cases}$ kommer $f(x)$ att vara Riemann integrerbar?

Svar: Nej.

2. Är $f(x) = e^{\cos(x)x^x} - 718 \cos(\sin(x))4^{38+x^{918}}$ integrerbar på intervallet $[-10^{10}, 10^{20^{30}}]$.

Svar: Ja, kontinuerliga funktioner är integrerbara på slutna begränsade intervall.

3. Låt $f(x)$ vara en begränsad funktion på intervallet $[-3, 3]$ och $\Psi_k(x)$ en sekvens trappfunktioner så att $\Psi_0(x) \leq \Psi_1(x) \leq \Psi_2(x) \leq \dots \leq f(x)$. Kommer $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-3}^3 \Psi_k(x) dx$ att konvergera?

Svar: Ja. Eftersom Ψ_k är en växande sekvens så kommer deras integraler att forma en växande sekvens av tal. Då $f(x)$ är begränsad så kommer integralerna av Ψ_k att vara begränsade. Ökande begränsade sekvenser konvergerar enl kompletthetsaxiomet.

4. Finns det någon funktion $f(x)$ som är definierad på $[0, 1[$ och $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \rightarrow \infty$ men $f(x)$ är Riemann integrerbar? Kan du beräkna $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$? Reflektera!

Svar: Nej.

5. Kommer $\lim_{t \rightarrow y} \left[\frac{d}{dt} \int_0^{\sin(t)} \arcsin(x) dx \right] = y \cos(y)$ för alla $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$?

Svar: Ja (Enligt definitionen av primitiv funktion, om vi tar hänsyn till den inre derivatan (kedjeregeln).)

6. Om $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{för } x \neq 0 \\ 1 & \text{för } x = 0 \end{cases}$ kommer då $f'(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{för } x \neq 0 \\ 0 & \text{för } x = 0 \end{cases}$?

Svar: Nej! (Observera att f är diskontinuerlig i $x = 0$ så f är inte deriverbar i $x = 0$. Rätt derivata är därför $f'(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{för } x \neq 0 \\ \text{odefinierad} & \text{för } x = 0 \end{cases}$.)

7. Antag att $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$ och $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ för någon integrerbar funktion $f(x)$ definierad på $[0, 2]$. Vad är $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} f(x) dx$?

Svar: 0 (Observera att vi beräknar ytan av ett område som har basen $2\epsilon \rightarrow 0$. Eftersom höger och vänstergränsvärdet existerar så är f begränsad när $x \approx 0$.)

8. Vad är $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{x+1} e^{\frac{t^2-1}{t^2}} dt$?

Svar: e (Observera att $e^{\frac{t^2-1}{t^2}} \rightarrow 1$ då $t \rightarrow \infty$.)

9. Vad är $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \arctan x dx$?

Svar: $\pi/2$ (Den här är lite knepigare. Men i om vi gör variabelbytet $y = x/T$ så får vi $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^1 \arctan(Ty) dy$ och för varje $y > 0$ så kommer $\arctan(Ty) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ då $T \rightarrow \infty$.)

10. Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[0, 1]$ kan man då skriva $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{1}{k} f(n/k)$ på ett enklare sätt?

Svar: Ja, detta är $\int_0^1 f(x) dx$. (Rita en bild med grafen av $f(x)$ och varje term i summan $\sum_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{1}{k} f(n/k)$ som en rektangel med bas $[(n-1)/k, n/k]$ och höjd $f(n/k)$ om k är hyfsat stort, säg $k = 10$, så blir det intuitivt klart att summan approximerar ytan under grafen.)

11. Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[-1, 1]$ och $-1 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < x_{n+1} \dots < 1$ är punkter så att $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ kommer då $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| f(x_n) = \int_{-1}^1 f(x) dx$?

Svar: Nej. (Den här är lite knepig förstod jag när vi diskuterade den på föreläsningen. Men för att en uppdelning $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ ska ge en bra approximation till $\int_a^b f(x) dx$ så måste avståndet mellan x_j och x_{j+1} vara litet för alla j . Men om sekvensen i uppgiften är tex $x_j = 1 - 1/j$ för $j \in \mathbb{N}$ och $x_0 = -1$ så kommer vi bara att ha ett intervall i området $[-1, 0]$. Rita gärna grafen av $f(x)$ och ytan $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| f(x_n)$. Då kommer du att se att Ψ är en dålig approximation av $f(x)$ om $f(x)$ inte $f(x)$ är nästan konstant i $[-1, 0]$)

12. Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[0, \infty]$ kommer då $\int_0^\infty f(x)dx$ att existera? Kommer, för varje tal $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a \geq 0$, $\int_a^b f(x)dx$ att existera?

Svar: $\int_0^\infty f(x)dx$ existerar inte som en generaliserad integral i allmänhet (ta tex $f(x) = 1$ vilken är kontinuerlig men $\lim_{X \rightarrow \infty} \int_0^X f(x)dx$ divergerar). Att $\int_a^b f(x)dx$ existerar följer direkt av att $f(x)$ är kontinuerlig (Sats i boken).

13. Låt $f_1, f_2, f_3, \dots$ vara en oändlig mängd kontinuerliga funktioner definierade på $[0, 1]$, kommer då $\sum_{n=1}^\infty \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^\infty f_n(x)dx$?

Svar: Nej. (Det här är en lite elak uppgift då den går lite utanför kursen men jag ville ha med den för att visa att det finns mer att göra i analysen. Vi har visat att det finns en relation mellan derivatan och integralen - men det finns många andra relationer att undersöka: tex. när man har rätt att byta ordning på oändliga serier och integraltecknet. Här så skulle vi kunna tänka oss att $f_n(x) = \cos(x/\pi)$ för alla n . Då är $\int_0^1 f_n(x)dx = 0$ för alla n men summan till höger blir $\sum_{n=1}^\infty \cos(x/\pi)$ vilken naturligtvis divergerar för alla $x \neq 1/2$ så summan (och således integralen) till höger är inte meningsfull.)

14. Om $f(x)$ är integrerbar och begränsad på $[-5, 5]$ finns det då ett tal c så att $10c = \int_{-5}^5 f(x)dx$? Finns det ett $x_c \in [-5, 5]$ så att $f(x_c) = c$?

Svar: Absolut, $c = \frac{1}{10} \int_{-5}^5 f(x)dx$. Det finns dock inte nödvändigtvis något x_c så att $f(x_c) = c$. För det behövs kontinuitet. Ett motexempel skulle vara $f(x) = -1$ för $x < 0$ och $f(x) = 1$ för $x > 0$ då är $c = 0$ men $f(x) \neq 0$ för alla x . Observera att detta innebär att antagandet att $f(x)$ är kontinuerlig i integralkalkylens medelvärdessats är nödvändigt. Och eftersom vi använder integralkalkylens medelvärdessats i beviset av analysens huvudsats så är kontinuitetsantagandet nödvändigt även där.

15. För vilka integrerbara funktioner $f(x)$ gäller $\left| \int_{-3}^4 f(x)dx \right| = \int_{-3}^4 |f(x)|dx$?

Svar: Den här frågan är lite knepig. Om $f(x)$ är kontinuerlig så är svaret om antingen $f(x) \geq 0$ eller om $f(x) \leq 0$. Men om $f(x)$ är styckvis kontinuerlig så räcker det med att $f(x) \geq 0$ eller $f(x) \leq 0$ för alla utom ett ändligt antal punkter.

16. Antag att $f(x)$ och $g(x) \geq 0$ är deriverbara på $[0, \infty]$, vad är $D \int_0^{g(x)} f(t)dt$? Kan vi försvaga något antagande och dra samma slutsats?

Svar: $g'(x)f(g(x))$. Observera att vi kan definiera $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, då är uttrycket i uppgiften $F(g(x))$ och vårt svar följer av analysens huvudsats och kedjeregeln. För det argumentet så behöver $f(x)$ inte vara deriverbar. Vi kan försvaga det antagandet till $f(x)$ kontinuerlig.

17. Om $f(1) = -1$ och $\int_1^5 f'(x)dx = 2$ vad är $f(5)$?

Svar: $f(5) = 1$. Detta eftersom $2 = \int_1^5 f'(x)dx = f(5) - f(1) = f(5) + 1$.

18. Gäller den generaliserade medelvärdessatsen utan antagandet $g \geq 0$? Om inte hitta på ett motexempel.

Svar: Nej den gäller inte. Tex om $g(x) = \sin(x)$ och $f(x) = x$, $a = -1$ och $b = 1$. Då är $f(\xi) \int_{-1}^1 g(x)dx = 0$ för alla ξ men $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx > 0$ då integranden är strikt positiv i alla punkter förutom $x = 0$.

19. Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$ så $D \int_a^x f(t)dt = f(x)$ enligt analysens huvudsats. Låt

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{om } x < 0 \\ 0 & \text{om } x = 0 \\ 1 & \text{om } x > 0 \end{cases}$$

och $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$. För vilka x är $F'(x)$ definierad, vad är värdet av $F'(x)$ i dessa punkter? Är höger respektive vänsterderivatan definierad, vad är värdet av höger och vänsterderivatan i så fall?

Svar: $F'(x)$ är definierad för $x \neq 0$ (dvs där $f(x)$ är kontinuerlig). Höger och vänsterderivatan är dock definierad överallt, detta följer direkt från höger och vänsterderivatans definition.

20. Om $f(x)$ är en kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}$ så att $f(x) \leq 10$ kommer då $\int_{-2}^1 f(x)dx \leq 30$? Kommer $\int_{-2}^1 f^2(x)dx \leq 300$?

Svar: $\int_{-2}^1 f(x)dx \leq 30$ eftersom $\int_{-2}^1 f(x)dx \leq \int_{-2}^1 10dx \leq 30$. Det andra påståendet är inte sant. (Motexempel $f = -100 \leq 10$.)

21. Om $f(x)$ är en kontinuerlig funktion på $]0, \infty[$ så att $|f(x)| \leq |x|^\alpha$ för alla $x > 0$. För vilka värden på $a > 0$ och α kommer $\int_a^\infty |f(x)|^2 dx$ garanterat att vara konvergent?

Svar: Om $a > 0$ så konvergerar integralen för $\alpha < -1/2$. Om $a = 0$ så är integralen divergent för alla α .

22. Är sats 11 på sidan 316 sats sann utan antagandet $f \geq 0$?

Svar: Nej (Tex om $f(x) = -\frac{1}{x}$ så är $f < g = 0$ och $\int_0^\infty g(x)$ är konvergent men $\int_0^\infty f(x)dx$ är divergent.)

23. **Svår?** Låt $f(x)$ vara integrerbar på $[-1, 1]$ och $f(0) = 0$. Är den generaliserade integralen $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{x} dx$ konvergent om $f(x)$ är begränsad? Kontinuerlig (LEDTRÅD: Är $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|\ln(|x|)|} & \text{om } x \neq 0 \\ 0 & \text{om } x = 0 \end{cases}$ kontinuerlig?)? Deriverbar?

Svar: Divergent i allmänhet om f är begränsad eller kontinuerlig (exemplet i ledtråden är kontinuerlig.). Men om f är deriverbar så kommer $f(x)/x$ att vara begränsad så integralen blir konvergent.

24. Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på $[0, 1]$ och att den generaliserade integralen $\int_0^1 \frac{|f(x)|}{x} dx$ konvergerar. Kommer då $\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x} dx$ att konvergera?

Svar: Ja!

25. Vi vet att $1 - |x|$ inte är primitiv funktion till någon funktion definierad på $[-1, 1]$ (eftersom derivatan av $1 - |x|$ inte är definierad i $x = 0$). Men finns det någon funktion $f(x)$ så att $1 - |x| = \int_{-1}^x f(t)dt$? Reflektera!

Svar: Ja det finns en sådan funktion. Reflektionen är att integralen är mer generell än primitiva funktionen. Detta leder till möjligheten att definiera ett mer generellt derivatabegrepp. Men det är något som vi måste lämna till en annan kurs.

5 Modul 5.

1. Vilken kurva i planet är $(\sin(t), \cos(t))$ för $t \in [0, 2\pi[$? Vilken kurva är $(2\sin(t), 3\cos(t))$ för $t \in [0, 2\pi[$? Vilken kurva är $(\sin(t), \cos(t))$ för $t \in [0, 4\pi[$?

Svar: Första kurvan ger en cirkel i planet, den andra en ellips och den tredje ger en cirkel genomlöst två varv.

2. Rotationsvolymen som fås när området mellan grafen av den kontinuerliga funktionen $f(x)$, $a \leq x \leq b$ roteras kring x -axeln är noll. Vad är $f(x)$?

Svar: 0 (Rotationsvolymen är $\int_a^b \pi f^2(x) dx$ vilken är lika med noll endast om $f(x) = 0$ (här använder vi kontinuitet) eller $a = b$)

3. Finns det någon rotationssymmetrisk kropp given av en deriverbar funktion $f(x)$ på $[0, \infty[$ så att kroppens yta är oändlig men dess volym ändlig?

Svar: Ja (tex $f(x) = \frac{1}{1+x}$.)

4. Finns det någon rotationssymmetrisk kropp given av en begränsad och deriverbar funktion $f(x)$ på $[0, \infty[$ så att kroppens volym är oändlig men dess yta ändlig?

LEDTRÅD: Eftersom $f'(x)^2 \geq 0$ så kommer $\sqrt{1 + f'(x)^2} \geq 1$.

Svar: Nej

5. Är Cauchys integralkriterium (Sats 1 på sidan 353) sant utan antagandet att $f(x)$ är avtagande? Hitta ett motexempel.

Svar: Nej.

6. Är Cauchys integralkriterium sant utan antagandet att $f(x) \geq 0$? Hitta ett motexempel.

Svar: Ja. Om $f(x) < 0$ för något x så kommer integralen inte att konvergera.

7. Vilka av följande serier är konvergenta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n}$ och för vilka konstanter α och C är $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^\alpha}$ konvergent?

Svar: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ är inte konvergent, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n}$ är konvergent (Leibnitz kriterium). $\alpha > 1$ och alla $C \in \mathbb{R}$ (om $C = 0$ så är serien naturligtvis konvergent för alla α .)

8. Är volymen av följande rotationsvolym ändlig: Volymen som fås då ytan mellan $\frac{1}{x}$ och x -axeln då $x \geq 1$ roteras kring x -axeln.

KOMMENTAR: När den store filosofen Hobbes såg det här resultatet lär han ha uttryckt: "to understand this for sense, it is not required that a man should be a geometer or a logician, but that he should be mad." Kanske är matematiken endast för oss förryckta - och inträdet i matematiken kostar oss vårt förstånd.

Svar: Ja (enligt formeln volym $= \int_1^{\infty} \pi f(x)^2 dx$.)

9. Är volymen av följande rotationsyta ändlig: Ytan som fås då grafen av $y = \frac{1}{x}$ då $x \geq 1$ roteras kring x -axeln?

Svar: Nej (Ytan är $\lim_{X \rightarrow \infty} \int_1^X 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \geq \lim_{X \rightarrow \infty} \int_1^X \frac{2\pi}{x} dx$ vilken divergerar, här använde vi också att $\sqrt{1 + a^2} \geq 1$.)

10. En termostat ser till att temperaturen, $T(t)$, i tidpunkten t förändras enligt $T'(t) = 20 - T(t)$ vilka är de temperaturer som termostaten håller konstant.

Svar: 20 (Då säger diff ekvationen att $T' = 0$, dvs temperaturen förändras inte.)

11. Skriv ner en differentialekvation vars lösning $y(x)$ växer då $y(x) \leq -1$, avtar då $y(x) > 1$ och inte förändras (med avseende på x) då $y(x) = 1/2$.

Svar: Tex $y' = -(y - \frac{1}{2})$ eftersom då kommer $y' > 0$ då $y < 1/2$, $y' < 0$ då $y > 1/2$ och $y' = 0$ då $y = 1/2$.

12. Låt $f(x)$ vara en given kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}$. Kommer $y(x) = \int_0^x f^2(t)dt$ att lösa differentialekvationen $y'(x) = f^2(x)$?

Svar: Ja enligt analysens huvudsats.

13. Låt $G(x)$ vara en deriverbar funktion och $h(x)$ en kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}$. Vilken differentialekvation löser $y(x) = e^{-G(x)} \left(\int h(x)e^{G(x)}dx \right) + Ce^{-G(x)}$?

Svar: $y' + G'(x)y = h(x)$

14. Vilka av följande ekvationer är separabla: $y^3(x)y'(x) = \cos(x)$, $y'(x) + 3x^2y(x) = e^x$, $(x^2 + 1)y'(x) = y(x) \ln(|x|)$. Vad gör separabla ekvationer viktiga?

Svar: Den första och den tredje. De är viktiga eftersom vi kan använda kedjeregeln för att lösa dem.

15. Vilken deriveringsregel gör separabla ekvationer förhållandevis enkla att lösa?

Svar: Kedjeregeln.

16. Rita vektorfältet $(1, y^2 + x)$, dvs en skiss av xy -planet där punkten (x, y) förses med vektorn $(1, y^2 + x)$. Skissa sedan lösningen till $y'(x) = y^2 + x$ i samma talplan.

Svar: Orkar inte!

17. Låt $g(y) > 0$ vara en kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}$ med primitiv funktion $G(x)$. Vilken differentialekvation löser $y(x) = G^{-1}(x) \left(\int h(x)dx + C \right)$?

Svar: $G'(y)y' = h(x)$.

18. Vilken sats från integralkalkylen är den fundamentala satsen för att lösa integralekvationen $y(x) = \int_0^x g(t)y(t)dt$?

Svar: Analysens huvudsats. Vi kan derivera integralekvationen och få en enkel linjär differentialekvation $y' = yg(x)$ som vi kan lösa.

19. Antag att $\mathcal{L}y(x) = y''(x) + \sin(x)y'(x) + 3y(x)$, att $\mathcal{L}f(x) = 0$ och att $\mathcal{L}g(x) = 0$, vad blir $\mathcal{L}(f(x) + g(x))$?

Svar: 0 (Ekvationen är linjär.)

20. Antag att $\mathcal{L}y(x) = y'(x) + y^2(x)$, att $\mathcal{L}f(x) = 0$ och att $\mathcal{L}g(x) = 0$ vad är $\mathcal{L}(f(x) + g(x))$? Varför skiljer sig svaret nu från förra uppgiften?

Svar: $\mathcal{L}(f(x) + g(x)) = 2f(x)g(x)$ (Den här är inte linjär så vi kan inte bara addera lösningar och få en ny lösning. Observera att detta gör att hela strategin att lösa andra ordningens differentialekvationer genom att skriva lösningen som $y_h + y_p$ inte fungerar för icke-linjära ekvationer.)

21. **Svar?** Antag att $a'(x) = b(x)$. Skriv $y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = h(x)$ som två första ordningens differentialekvationer.

LEDTRÅD: Vilken ekvation löser $w(x) = y'(x) + a(x)y(x)$?

Svar: Vi får följande differentialekvationer

$$\begin{aligned} w' &= h(x) \\ y'(x) + a(x)y(x) &= w(x). \end{aligned}$$

Observera att vi kan enkelt lösa den första differentialekvationen (för w) genom att integrera h . Då blir den andra differentialekvationen en linjär första ordningens differential ekvation i $y(x)$ vilken vi

också kan lösa. Det är därför möjligt att lösa vissa andra ordningens linjära differentialekvationer med *variabla* koefficienter. Förmodligen så kommer vissa av er att stöta på liknande ekvationer i någon kurs någon gång. I det fallet så är det viktigt att kunna resonera kring matematik och skapa sin egen lösning - även om den inte råkade vara på en form som ingick i den här kursen.

22. Hitta två konstanter a och b så att alla lösningar till $y''(x) + ay(x) + b(x)y(x) = 0$ som inte är identiskt noll antingen går mot oändligheten ($\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \infty$) eller mot minus oändligheten ($\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = -\infty$).

Svar: $a = -3$, $b = 2$ (då är det karakteristiska polynomet $r^2 - 3r + 2$ vilket har rötterna $r = 2$ och $r = 1$ så alla lösningar är på formen $Ae^{2x} + Be^x$ vilken uppfyller kriteriet i uppgiften.)

23. Hitta två konstanter a och b så att alla lösningar till $y''(x) + ay(x) + b(x)y(x) = 0$ så att alla lösningar går mot noll ($\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$).

Svar: $a = 3$, $b = 2$ (som i föregående uppgift)

24. Hitta två konstanter a och b så att alla lösningar till $y''(x) + ay(x) + b(x)y(x) = 0$ så att alla lösningar, som inte är identiskt lika med noll, är begränsade och periodiska (dvs det finns ett $\xi > 0$ så att $y(x) = y(x + \xi)$ för alla x).

Svar: $a = 0$ $b = 1$ (Den allmänna lösningen blir då $y(x) = A \sin(x) + B \cos(x)$ så $y(x + 2\pi) = y(x)$ för alla x .)

6 Modul 6.

1. Rita grafen av två funktioner $f(x)$ och $g(x)$, definierade på $[-1, 1]$, så att $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$ för alla n men $f(1/2) \neq g(1/2)$?

Svar: Orkar inte! (Tyvärr så kommer det här svaret inte att ge poäng på tentan...)

2. Kan man, för varje $C > 0$ och $\epsilon > 0$, hitta en funktion $f_{C,\epsilon}(x)$ definierad på hela $\mathbb{R}$ så att

$$|f_{C,\epsilon}(x) - p_8(x)| > C \quad \text{för något } |x| < \epsilon$$

där $p_8(x)$ är Maclaurinpolynomet av ordning 8 till $f_{C,\epsilon}$. Vad betyder detta?

Svar: Ja. Låt $f_{C,\epsilon}(x) = Mx^9$ då blir Maclaurinpolynomet av ordning 8 till $f_{C,\epsilon}$ identiskt lika med noll (dvs $p_8(x) = 0$) eftersom de första åtta derivatorna till $f_{C,\epsilon}$ är lika med noll. Men $f_{C,\epsilon}(x_0) = \frac{M\epsilon^9}{2^9}$ för $x_0 = \epsilon/2$ och om $M > 2^9 C / \epsilon^9$ så kommer därför $|f_{C,\epsilon}(x_0) - p_8(x_0)| > C$ så det finns definitivt f som i uppgiften.

Detta betyder att resttermen är väldigt nödvändig när man använder Taylor serier för att approximera funktioner. Om man inte kan kontrollera resttermen så kan ens approximation råka vara otroligt dålig (säg $C = 10^{10}$) även när man är otroligt nära punkten man vill approximera funktionen i (säg $\epsilon = 10^{-10}$).

3. Om tredje ordningens Maclaurinpolynom till $f(x)$ är $p(x) = 1 + 3x^2 + \frac{1}{2}x^3$ vad är fjärde ordningens Maclaurinpolynom till funktionen $F(x) = \int_0^x f(t)dt$?

Svar: $F(x) = x + x^3 + \frac{x^4}{8} + R(x)x^5$.

4. Om Maclaurinpolynomet av ordning tre till $f(x)$ är $p(x) = 2 + x^2$ vad är Maclaurinpolynomet till ordning tre till $g(x) = f(x^2)$?

Svar: 2 (Observera att $f(t) = 2 + t^2 + R_3(t)t^3$ vilket ger, med $t = x^2$, $f(x^2) = 2 + x^4 + R_3(x^2)x^6$ så den enda termen av grad lägre än tre är 2.)

5. Om $f(x)$ har Maclaurinpolynomet $p_2(x) = 2 + x + x^2$ vad är då andra ordningens Taylorpolynom i punkten $x = 2$ till $f(x - 2)$?

Svar: $p(x) = 2 + (x - 2) + (x - 2)^2$.

6. Om $f(x)$ är udda och deriverbar till ordning 5, vad är då $f''(0)$, $f^{(4)}(0)$?

Svar: 0 i båda fallen.

7. Om $f(x)$ är kontinuerligt deriverbar på $\mathbb{R}$, måste då $|f(x) - f(0)| \leq M|x|$ där $M = \max_{|\xi| \leq |x|} |f'(\xi)|$? Varför, varför inte?

Om $f(x)$ är två gånger kontinuerligt deriverbar på $\mathbb{R}$, måste då $|f(x) - f(0) - f'(0)x| \leq M|x|^2$ där $M = \max_{|\xi| \leq |x|} \frac{|f''(\xi)|}{2}$? Varför, varför inte?

Svar: Ja i båda fallen. Det första följer av medelvärdessatsen och det andra av att $g_{\pm}(x) = f(x) - f(0) - f'(0)x \pm M|x|^2$ är en konkav/konvex funktion med värde noll i den enda stationära punkten.

8. Om $f(x)$ har kontinuerliga derivator av alla ordningar på $\mathbb{R}$ och $|f(x) - ((x - 3) + (x - 3)^4)| \leq 12|x - 3|^7$ vilken är den högsta ordningens Taylorpolynom vi kan ange för $f(x)$, i punkten $x = 3$, baserat på den givna informationen. Vad är Taylorpolynomet till $f(x)$ av den största ordning som vi kan vara säkra på?

Svar: Största vi kan vara säkra på är ordning 6 och Taylorpolynomet av ordning 6 är $(x - 3) + (x - 3)^4$.

9. Om Taylorpolynomet av ordning tre i punkten $x = 1$ till $f(x)$ är $p_3(x) = -4 + (x - 1) + \frac{1}{6}(x - 1)^3$, kan vi utifrån denna information beräkna $f^{(3)}(0) = 0$? $f(x)$ är tre gånger kontinuerligt deriverbar i hela $\mathbb{R}$.

Svar: Nej, taylorpolynomet ger bara information lokalt (nära punkten $x = 1$).

10. Antag att $f(x)$ är kontinuerligt deriverbar på $\mathbb{R}$ och att Taylorpolynomet av ordning tre i punkten $x = a$ är $p_3(x) = 6 + x + 4x^3$, för alla punkter $a \in \mathbb{R}$, vilken funktion är $f(x)$?

Svar: $f(x) = 6 + x + 4x^3$