Tentamen SF1602 13 Januari 2014

Hjälpmedel: Papper, penna.
Totalt 6 poäng per uppgift. För godkänt på modulen krävs 4 poäng.
För E krävs 4 godkända moduler. För ett D krävs 5 godkända moduler. Med 5 godkända moduler ges rätten att skriva tentamen del 2 vilken ger möjlighet till C,B och A.

Tentamen DEL 1.

Fråga 1: [Del 1, Modul 1]

1. Hur många av följande gränsvärden är 0?

   a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(2x)^3}$, **b)** $\lim_{x\to\infty} e^{-2x}4^x$, **c)** $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-6x+9}{x-3}$,

   d) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}$, **e)** $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)+|n|^n}{n!}$

   [SVARA MED ETT TAL 0,1,2,...,5. INGEN MOTIVERING KRÄVS.] **(1 poäng)**

2. Den naturliga definitionsmängden samt värdemängden till $f\circ g(x)$ då $f(x) = \frac{1}{2+x}$ och $g(x) = 2\cos(x)$.

   [INGEN MOTIVERING KRÄVS.] **(1 poäng)**

3. Beräkna följande gränsvärde

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4x+9^x}{6+3^{2x}-\ln(x)\cos(3x)}.$$

   Ange noga varje sats du använder i din uträkning.

   [FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(4 poäng)**

Svar:

1. 2 (endast b och c går till noll)
2. $D_f = \mathbb{R}\setminus\{\pm\pi, \pm3\pi, \pm5\pi, ...\}$ och $V_f = [1/4, \infty[$.
3. Vi skriver uttrycket på formen $\frac{1+\frac{x^2}{9^x}-\frac{4x}{9^x}}{1+\frac{6}{9^x}-\frac{\ln(x)\cos(x)}{9^x}}$. Vi börjar med att beräkna gränsvärdet då $x\to\infty$ i nämnaren.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{9^x}-\frac{\ln(x)\cos(x)}{9^x}\right) = \left\{\begin{array}{c}\text{summa}\\ \text{regeln}\end{array}\right\} = 1+\lim_{x\to\infty}\frac{6}{9^x}-\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)\cos(x)}{9^x} = 1, \tag{1}$$

   där vi använde standardgränsvärdena att $\frac{A}{\alpha^x}\to 0$ och $\frac{\ln(x)}{\alpha^x}\to 0$ då $x\to\infty$ för $\alpha>1$ samt att $\left|\frac{\ln(x)\cos(x)}{9^x}\right| \le \left|\frac{\ln(x)}{9^x}\right| \to 0$ och instängningsregeln.

   Då nämnaren i uttrycket konvergerar till $1\neq 0$ så kan vi använda kvotregeln och dra slutsatsen att

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{x^2}{9^x}-\frac{4x}{9^x}}{1+\frac{6}{9^x}-\frac{\ln(x)\cos(x)}{9^x}} = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{9^x}-\frac{4x}{9^x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{9^x}-\frac{4x}{9^x}\right)} = \left\{\begin{array}{l}\text{summa regeln}\\ \text{och (1)}\end{array}\right\} = \frac{1+\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{9^x}-\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{9^x}}{1} = 1,$$

   där vi använde standardgränsvärdet $\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\alpha^x}\to 0$ för alla $\alpha>1$ i den sista uträkningen.

   Vårt svar blir således

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+9^x}{6+3^{2x}-\ln(x)\cos(3x)} = 1.$$

Rättningsmall: På delfråga 1 och 2 ger rätt svar en poäng, fel svar noll poäng.
På delfråga 3 gäller följande:

1. -1 poäng för fler än två enkla räknefel.

2. -1 poäng om man inte hänvisar till de satser som används. Det är acceptabelt att missa att nämna någon sats - men en alvarlig avsaknad av referenser skall straffas.
3. -1 poäng för varje allvarligt beräkningsfel.
4. 0 poäng om svaret inte motiveras alls.

Fråga 2: [Del 1, Modul 2]

1. Antag att $f(x)$ är en kontinuerlig funktion definierad på $[0,1]$ så att $f(0) < 0$, $f(1) \geq 1$. Finns det då ett $x_0 \in [0,1]$ så att $f(x_0) = x_0$?

   [SVARA "JA", "NEJ" ELLER "OMÖJLIGT ATT AVGÖRA".] **(1poäng)**

2. Låt $f(x)$ vara en deriverbar funktion på $\mathbb{R}$. Ange definitionen av $f'(1/2)$?

   [ANGE DEFINITIONEN, INGEN MOTIVERING KRÄVS.] **(1poäng)**

3. Låt

$$f(x) = \begin{cases} 3 + \ln(x)\sin(x) & \text{om } x < \pi \\ a + b\cos\left(\frac{1}{2}x^2\right) & \text{om } x \geq \pi \end{cases}$$

   vara en funktion definierad på $]0,\infty[$. Bestäm a och b så att $f(x)$ är deriverbar i $x = \pi$. Hänvisa till de satser du använder.

   [FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(4poäng)**

Svar:

1. Ja (Använd satsen om mellanliggande värden på funktionen $g(x) = f(x) - x$.)
2. $f'(1/2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1/2+h)-f(1/2)}{h}$.
3. För att derivatan skall existera i $x = \pi$ så räcker det att $f(x)$ är kontinuerlig i punkten $x = \pi$ och att $\lim_{x\to\pi^+} f'(x) = \lim_{x\to\pi^-} f'(x)$, där vi förutsätter att funktionens derivata är definierad för x nära π så att höger och vänster-gränsvärdet är definierat.

   I de öppna mängderna $\{0 < x < \pi\}$ och $\{x > \pi\}$ har vi inga problem att derivera funktionen och beräknar där

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} + \ln(x)\cos(x) & \text{om } x < \pi \\ -bx\sin\left(\frac{1}{2}x^2\right) & \text{om } x > \pi \end{cases}$$

   där vi använde produktregeln (då $0 < x < \pi$) och kedjeregeln (då $x > \pi$) samt de elementära funktionernas derivator i vår uträkning.

   Eftersom $\frac{\sin(x)}{x} + \ln(x)\cos(x)$ och $-bx\sin\left(\frac{1}{2}x^2\right)$ är en sammansättning av elementära funktioner som är kontinuerliga på $\mathbb{R}$ utom i punkten $x = 0$ så kommer dessa funktioner att vara kontinuerliga i en omgivning av $x = \pi$ så kan vi substituera $x = \pi$ i gränsvärdet (här använder vi kvot och produktregeln)

$$\lim_{x\to\pi^-} f'(x) = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\sin(x)}{x} + \ln(x)\cos(x) = \frac{\sin(\pi)}{\pi} + \ln(\pi)\cos(\pi) = -\ln(\pi).$$

   På samma sätt (med produkt och sammansättningsregeln för gränsvärden) så får vi $\lim_{x\to\pi^-} f'(x) = -b\pi\sin\left(\frac{1}{2}\pi^2\right)$. Så höger och vänstergränsvärdet sammanfaller om $b = \frac{\ln(\pi)}{\pi\sin\left(\frac{1}{2}\pi^2\right)}$.

   Vi måste också välja a så att $f(x)$ är kontinuerlig i $x = \pi$. Det räcker att visa att höger och vänstergränsvärdet sammanfaller i $x = \pi$. Eftersom $3 + \ln(x)\sin(x)$ är kontinuerlig för alla $x > 0$ så

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = 3 + \ln(\pi)\sin(\pi) = 3$$

   och

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = a + b\cos\left(\frac{1}{2}\pi^2\right).$$

Höger och vänstergränsvärdet sammanfaller alltså om

$$a = 3 - b\cos\left(\frac{1}{2}\pi^2\right) = 3 - \frac{\ln(\pi)\cos\left(\frac{1}{2}\pi^2\right)}{\pi\sin\left(\frac{1}{2}\pi^2\right)}.$$

Om vi väljer a och b enligt

$$a = 3 - \frac{\ln(\pi)\cos\left(\frac{1}{2}\pi^2\right)}{\pi\sin\left(\frac{1}{2}\pi^2\right)} \text{ och } b = \frac{\ln(\pi)}{\pi\sin\left(\frac{1}{2}\pi^2\right)}$$

så blir $f(x)$ deriverbar i $x = \pi$.

Rättningsmall:

1. -2 poäng om man inte väljer a och b så att funktionen blir kontinuerlig.
2. -1 poäng för mer än ett enkelt beräkningsfel.
3. -1 poäng för varje allvarligt beräkningsfel.
4. -1 poäng om det redovisas dåligt vilka satser som används eller saknar förklarande text. Använd sunt förnuft och rätta inte jättehårt. Det viktiga är att studenten visar en medvetenhet om matematisk teori och förklarar sitt svar.

Fråga 3: [Del 1, Modul 3]

1. Låt $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{om } -1 \le x \le 0 \\ 1 & \text{om } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{om } 1 \le x \le 5 \end{cases}$. Ange en primitiv funktion $F(x)$ till $f(x)$ så att $F(x)$ är definierad på $[-1, 5]$.

   [ANGE $F(x)$ ELLER "OMÖJLIGT", INGEN MOTIVERING KRÄVS.] **(1poäng)**

2. Ange en rationell funktion som har partialbråksuppdelningen $\frac{3x}{x^2+1} + \frac{3}{(x-1)}$

   [SVARA MED ATT ANGE FUNKTIONEN ELLER "OMÖJLIGT".] **(1poäng)**

3. Bestäm alla primitiva funktioner till $f(x) = e^{4x}\left(e^{2x}+3\right)^6$. Ange noga alla satser du använder.

   [FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(4poäng)**

Svar:

1. Omöjligt
2. $\frac{3x(x-1)+3(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}$
3. Vi beräknar

$$\int e^{4x}(e^{2x}+3)^6 dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{variabel subst.} \\ t = e^{2x},\ e^{2x}dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int t(t+3)^6 dt = \frac{1}{14}\int t\frac{d(t+3)^7}{dt}dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{partiell} \\ \text{integration} \end{array} \right\} = \frac{t(t+3)^7}{14} - \frac{1}{14}\int (t+3)^7 dt = \frac{t(t+3)^7}{14} - \frac{(t+3)^8}{112} = \frac{e^{2x}(e^{2x}+3)^7}{14} - \frac{(e^{2x}+3)^8}{112}.$$

Rättningsmall:

1. -1 poäng om man inte hänvisar till satser i sitt svar.
2. -1 poäng om man använder partiell integration fel.
3. -1 poäng om man använder variabelsubstitution fel.
4. -1 poäng om man gör mer än ett enkelt beräkningsfel.

Fråga 4: [Del 1, Modul 4]

1. Ange en kontinuerlig funktion på $[-1,3]$ som inte är integrerbar.

[ANGE EN FUNKTION ELLER "OMÖJLIGT", INGEN MOTIVERING KRÄVS.] **(1poäng)**

2. Ge ett exempel på en funktion $f(x)$ definierad på $[0,\infty[$ så att $f(x) \leq \frac{1}{1+x^3}$ och $\int_0^\infty f(x)dx$ divergerar.

[ANGE EN FUNKTION $f(x)$ ELLER SVARA "OMÖJLIGT", INGEN MOTIVERING KRÄVS.] **(1poäng)**

3. Bestäm den punkt $\xi \geq 0$ då $\int_0^\xi e^{4\cos(2x)}\left(3-4x^2\right)dx$ antar sitt största värde. Hänvisa till de satser du använder.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS] **(4poäng)**

Svar:

1. Omöjligt (det finns en sats som säger att kontinuerliga funktioner på slutna begränsade intervall är integrerbara)
2. $f(x) = -1$
3. Vi kallar $F(\xi) = \int_0^\xi e^{4\cos(2x)}\left(3-4x^2\right)dx$. Enligt analysens huvudsats så kommer

$$\frac{dF(\xi)}{d\xi} = e^{4\cos(2\xi)}\left(3-4\xi^2\right).$$

Eftersom $e^{\cos(2\xi)} > 0$ ($e^x > 0$ för alla x) så kommer $F'(\xi) > 0$ då $\left(3-4\xi^2\right) > 0$, $F'(\xi) = 0$ då $\left(3-4\xi^2\right) = 0$ och $F'(\xi) < 0$ då $\left(3-4\xi^2\right) < 0$. Det vill säga $F'(\xi) \geq 0$ då $\xi \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ och $F'(\xi) \leq 0$ då $\xi \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Så $F(\xi)$ växer då ξ går från noll till $\frac{\sqrt{3}}{2}$ och avtar därefter. Vi får att $F(\xi)$ antar sitt globala maximum i $\xi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rättningsmall:

1. -1 poäng om man inte hänvisar till satser eller förklarar sitt svar i ord.
2. -1 poäng för mer än ett enkelt beräkningsfel.
3. -1 poäng för varje allvarligt beräkningsfel.

Fråga 5: [Del 1, Modul 5]

1. Hitta en noll-skild homogen lösning y_h till den andra ordningens differential ekvation med karakteristiskt polynom $r^2 - 9$.

[ANGE EN FUNKTION y_h ELLER "OMÖJLIGT". INGEN MOTIVERING KRÄVS] **(1poäng)**

2. Låt $y'(x) = ay(x)$ för alla $x \geq 0$ och $y(0) = 1$. Antag dessutom att $y(x)$ är begränsad i $[0,\infty[$. Vilka värden kan a ha?

[SVARA MED ALLA a ELLER "OMÖJLIGT ATT AVGÖRA". INGEN MOTIVERING KRÄVS] **(1poäng)**

3. Hitta lösningen $y(x)$ till följande differentialekvation

$$y''(x) + 4y(x) = xe^{2x} \qquad \text{för } x > 0$$

och $y(0) = 0$ och $y'(0) = 0$.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(4poäng)**

Svar:

1. e^{3x} (Alla funktioner på formen $Ae^{3x} + Be^{-3x}$ är lösningar).
2. $a \leq 0$ (Eftersom $y(x) = e^{ax}$ och den är begränsad på $[0,\infty[$ om och endast om $a \leq 0$.)

3. Eftersom det karakteristiska polynomet är $r^2 + 4$ så kommer den homogena lösningen att vara på formen $y_h(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x)$.

För att hitta partikulärlösningen så ansätter vi att $y_p(x) = axe^{2x} + be^{2x}$ och beräknar

$$y_p'' + 4y_p = 8axe^{2x} + 8(a+b)e^{2x},$$

detta är lika med xe^{2x} om $a = \frac{1}{8}$ och $b = -\frac{1}{8}$. Vi får således en allmän lösning

$$y(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x) + \frac{xe^{2x}}{8} - \frac{e^{2x}}{8}.$$

Initialdata ger $0 = y(0) = B - \frac{1}{8}$, dvs $B = \frac{1}{8}$. Vidare $0 = y'(0) = 2A + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}$ så $A = \frac{1}{16}$.

Detta ger

$$y(x) = \frac{1}{16}\sin(2x) + \frac{1}{8}\cos(2x) + \frac{xe^{2x}}{8} - \frac{e^{2x}}{8}$$

vilket är vårt svar.

1. -1 poäng om man inte hittar den homogena lösningen.
2. -2 poäng om man inte hittar partikulärlösningen.
3. -1 poäng för mer än ett enkelt beräkningsfel.
4. -1 poäng för varje allvarligt beräkningsfel.
5. -1 poäng om man inte förklarar sin lösning.

Fråga 6: [Del 1, Modul 6]

1. Antag att $f(x)$ har den konvergenta Maclaurinserien $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n n!} x^n$. Vad är $f''(0)$?

   [Ange andraderivatan, ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

2. Antag att $|f^{(3)}(x)| \leq 2$ för alla $x \in \mathbb{R}$ och att andra ordningens Taylorpolynom till $f(x)$ i punkten $x = 1$ är $p_2(x) = 3 + (x-1)^2$ vad är det största värdet $|f(x) - p_2(x)|$ kan ha då $|x - 1| \leq \frac{1}{10}$?

   [Svara med ett tal, ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

3. Beräkna andra ordningens Taylorpolynom i punkten $x_0 = 1$ till

$$f(x) = \int_0^x e^t \cos(2t)dt.$$

   [Motivera ditt svar.] **(4poäng)**

Svar:

1. $y''(0) = \frac{4}{9}$.
2. $\frac{1}{3000}$
3. Taylorpolynomet av ordning 2 i punkten $x_0 = 1$ ges av uttrycket $f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2$. Vi behöver således beräkna $f(1)$, $f'(1)$ och $f''(1)$.

   Vi beräknar

$$f(1) = \int_0^1 e^t\cos(2t)dt = \int_0^1 \frac{de^t}{dt}\cos(2t)dt = \left\{ \begin{array}{c} \text{partiell} \\ \text{integration} \end{array} \right\} = e\cos(2) - 1 + 2\int_0^1 e^t \sin(2t)dt =$$

$$= e\cos(2) - 1 + 2\int_0^1 \frac{de^t}{dt}\sin(2t)dt == \left\{ \begin{array}{c} \text{partiell} \\ \text{integration} \end{array} \right\} = e\cos(2) - 1 + 2e\sin(2) - 4\int_0^1 e^t\cos(2t)dt =$$

$$= e\cos(2) - 1 + 2e\sin(2) - 4f(1).$$

Addera $4f(1)$ till höger och vänsterled och dela med 5 för att härleda

$$f(1) = \frac{e\cos(2) - 1 + 2e\sin(2)}{5}.$$

Enligt analysens huvudsats så kommer

$$f'(x) = e^x \cos(2x)$$

vilket leder till $f'(1) = e\cos(2)$. Deriverar vi $f'(x)$ igen så får vi, enligt produkt och kedjeregeln, $f''(x) = e^x\cos(2x) - 2e^x\sin(2x)$ så $f''(1) = e\cos(2) - 2e\sin(2)$.

Andra ordningens Taylorpolynom är således

$$\frac{e\cos(2) - 1 + 2e\sin(2)}{5} + (e\cos(2))(x-1) + \left(\frac{e\cos(2) - 2e\sin(2)}{2}\right)(x-1)^2.$$

Rättningsmall:

1. -1 poäng om lösningen inte är förklarad.
2. -1 poäng om Taylors formel används felaktigt.
3. -1 poäng för varje allvarligt beräkningsfel.
4. -1 poäng om fler än ett enkelt beräkningsfel görs.

Tentamen DEL 2.

Tankar om del 2 av tentan. Del 2 skall testa djupare kunskap för betyg C,B eller A. Jag tänker på följande sätt.

För ett C skall man kunna göra lite svårare beräkningar och också ha studerat lite bredare. Jag hoppas också att man har läst lite teori. Det är rimligt att kräva att man kan göra uppgift 1 (rita grafer) och 2 (beräkna en lite svårare integral) samt plocka några ströpoäng på $\epsilon - \delta$—beräkningar (Uppgift 4) och bevis (Uppgift 3 och 5) för att få ett C.

För ett B så borde man kunna kräva i nästan perfekta svar på uppgift 1 och 2 samt ett bra svar på Uppgift 4 ($\epsilon - \delta$). Detta skulle ge nästan 18 poäng. Man bör därför även kunna göra acceptabla bevis (Uppgift 3 och 5) för att få ett B.

För ett A så skall man förutom att behärska alla kursens beräkningar kunna göra de flesta bevisen. En A student bör därför ha nästan 30 poäng på uppgift 1-5 på del 2. Då man oundvikligen förlorar ströpoäng på tal 1-5 så förväntar jag mig också att en A student skall kunna göra tal 6. Tal 6 innehåller ett system av ordinära differentialekvationer som vi inte har diskuterat under kursen. Så tal 6 kräver lite kreativt tänkande. Man måste i princip kunna se att man kan derivera den tredje ekvationen och använda de två första för att få en andra ordningens diff ekvation. Om man ser detta så blir uppgift 6 ganska lätt. Men för ett A så måste man visa att man har potentialen att skapa nya idéer och använda sitt kunnande för att lösa problem som man inte har sett tidigare.

Varje fråga tilldelas 6 poäng. Totalt 36 poäng. För C krävs 12 poäng, för B krävs 20 poäng och för ett A krävs 28 poäng.

Fråga 1: [Del 2] Skissa grafen till funktionen $f(x) = \arctan x + \frac{x}{x^2-1}$. Ange noga alla singulära punkter, extrempunkter och beteendet av funktionen i oändligheten.

[MOTIVERA DITT SVAR.] **(6 poäng)**

Svar: Vi delar upp vår analys i flera steg.

Singulära punkter: Arctan är väldefinierad för alla x. Men $\frac{x}{x^2-1}$ har två singulariteter, $x = \pm 1$, där nämnaren är noll.

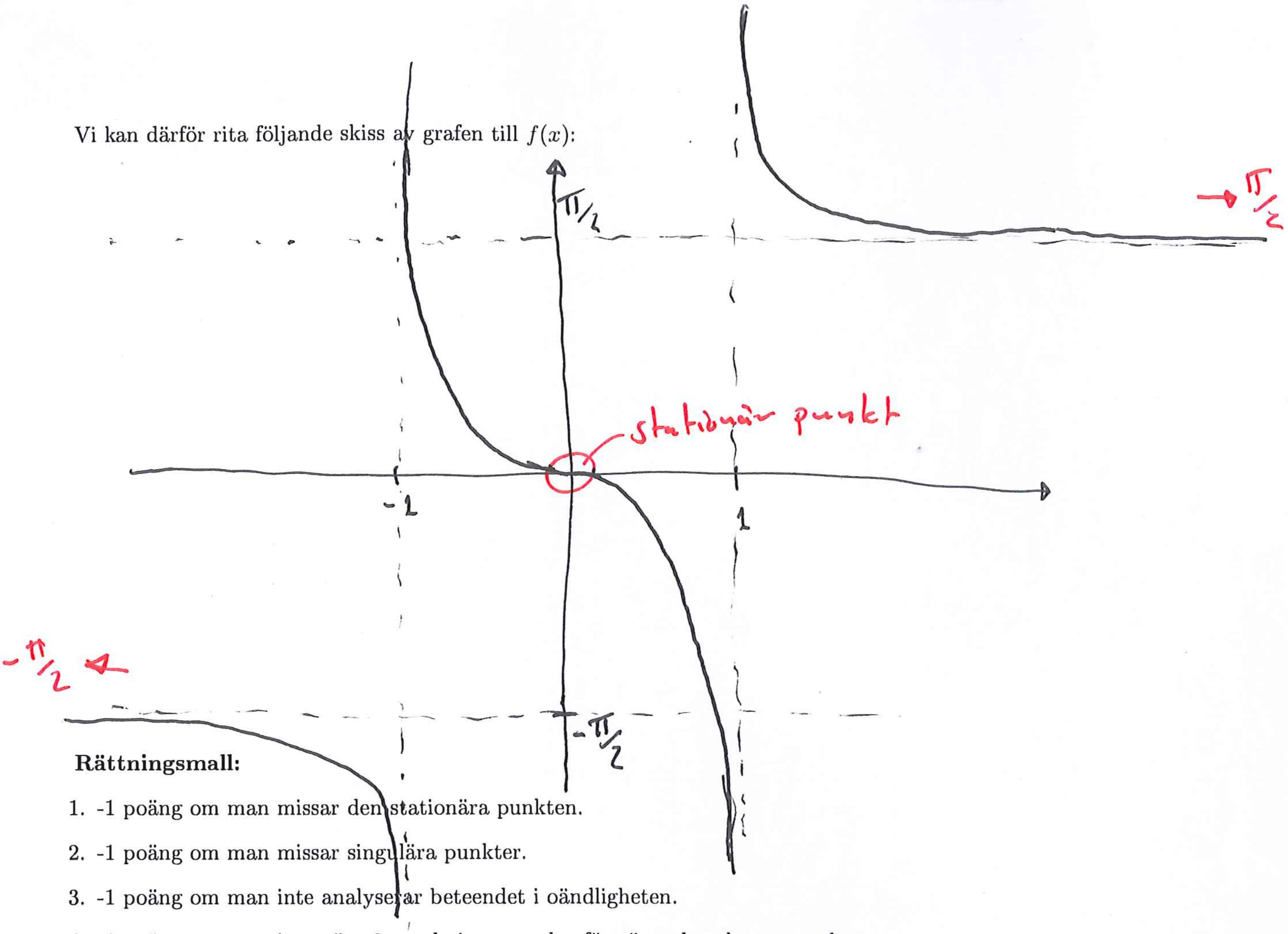
Beteende i oändligheten: Det gäller att $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \arctan(x) + \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = \frac{\pi}{2}$ enligt summaregeln och standardgränsvärden. På samma sätt får vi $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$.

Derivataanalys för växande/avtagande och stationära punkter. Derivatan av f beräknas

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2-1} - \frac{2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x^2}{(x^2+1)(x^2-1)^2}$$

enligt standardreglerna. Vi ser direkt att $f'(x) \leq 0$ då $x \neq \pm 1$ (där den är odefinierad) med $x = 0$ som enda stationär punkt.

Vi kan därför rita följande skiss av grafen till $f(x)$:



Rättningsmall:

1. -1 poäng om man missar den stationära punkten.
2. -1 poäng om man missar singulära punkter.
3. -1 poäng om man inte analyserar beteendet i oändligheten.
4. -1 poäng om man inte gör någon derivata analys för växande och avtagande.
5. -1 poäng om man inte motiverar sin graf.
6. -1 till -6 poäng om grafen är felritad eller om den inte stämmer med ens beräkningar.

Fråga 2: [Del 2] Beräkna följande integral

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\cos^2(2x)}{\sin(2x)} dx.$$

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(6poäng)**

Svar: Observera att $1 < \frac{\pi}{2} < \sqrt{3}$ så $\sin(2x) = 0$ då $x = \pi/2$ som ligger i integrationsintervallet. Detta innebär att integranden $\frac{\cos^2(2x)}{\sin(2x)}$ är singulär. Vi måste därför betrakta integralens som en generaliserad integral. Enligt definition så är den generaliserade integralen

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\cos^2(2x)}{\sin(2x)} dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_1^{\pi/2-\epsilon} \frac{\cos^2(2x)}{\sin(2x)} dx + \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\pi/2+\epsilon}^{\sqrt{3}} \frac{\cos^2(2x)}{\sin(2x)} dx \tag{2}$$

om båda gränsvärdena existerar (och är ändliga). Annars så är integralen divergent.

Det räcker således att visa att en av gränsvärderna i (2) är divergent för att integralen skall vara det. Vi kommer att visa att $\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_1^{\pi/2-\epsilon} \frac{\cos^2(2x)}{\sin(2x)} dx = \infty$. Vi gör följande beräkning

$$\int_1^{\pi/2-\epsilon} \frac{\cos^2(2x)}{\sin(2x)} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{variabel subst.} \\ \sin(2x) = t,\ \cos(2x)dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\sin(2)}^{\sin(2\epsilon)} \frac{\cos(\arcsin(t))}{t} dt = -\frac{1}{2} \int_{\sin(2)}^{\sin(2\epsilon)} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} dt \tag{3}$$

där vi har varit noga med att välja rätt definitionsområde för arcsin så att vi får rätt tecken, dvs "-", framför integralen. Eftersom $\sqrt{1-t^2}$ är avtagande i $[\sin(2\epsilon), \sin(2)]$ så kan vi uppskatta integranden i (3) enligt

$$\frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \geq \frac{\sqrt{1-\sin^2(2)}}{t}$$

därför gäller det att

$$-\frac{1}{2}\int_{\sin(2)}^{\sin(2\epsilon)} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}dt = \frac{1}{2}\int_{\sin(2\epsilon)}^{\sin(2)} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}dt \geq \frac{1}{2}\int_{\sin(2\epsilon)}^{\sin(2)} \frac{\sqrt{1-\sin^2(2)}}{t}dt = \frac{\sqrt{1-\sin^2(2)}}{2}\ln\left(\frac{\sin(2)}{\sin(2\epsilon)}\right) \to \infty$$

då $\epsilon \to 0^+$ på grund av sammansättningsregeln för gränsvärden och $\lim_{s\to\infty}\ln(s) = \infty$.

Enligt jämförelseprincipen så följer det att

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_1^{\pi/2-\epsilon} \frac{\cos^2(2x)}{\sin(2x)}dx = \infty$$

och den generaliserade integralen är därmed divergent.

Vi har därmed bevisat att integralen i uppgiften är divergent.

Rättningsmall:

1. 3 poäng för att ställa upp problemet rätt, dvs att inse att integralen är generaliserad och angripa den på det sättet.
2. 3 poäng för att visa att någon av de två integralerna divergerar.
3. -1 poäng för varje allvarligt beräkningsfel.
4. -1 poäng för att inte motivera sina beräkningar.
5. -1 poäng om svaret innehåller fler än ett litet räknefel.
6. Då uppgiften är lite av en trickfråga så misstänker jag att många kommer försöka beräkna integralen via en substitution $\arctan(t) = x$ eller liknande. Om detta görs och studenten visar att han/hon behärskar integrationstekniker väl så kan detta (felaktiga) angreppssätt ge upp till 4 poäng. Rättningsmall för det felaktiga svaret kommer nedan. Kom ihåg att vi främst testar för ett C betyg i den här uppgiften. En kort och felaktig lösning på detta sätt är:

Felaktig lösning till fråga 2 (kort svar): Om man gör den felaktiga substitutionen $\arctan(t) = x$ så får man följande integral:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\cos^2(2x)}{\sin(2x)}dx = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{(1-t^2)^2}{t(1+t^2)^2}dt =$$

$$= \{\text{ partialbråksuppdelning }\} = \int_{\pi/4}^{\pi/3}\left(\frac{1}{t} - \frac{4t}{(1+t^2)^2}\right)dt =$$

$$= \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{18}{9+\pi} - \frac{32}{16+\pi^2}.$$

Rättningsmall för det felaktiga svaret:

1. 1 poäng för att använda "rätt" substitution.
2. 1 poäng för att få rätt uttryck i den nya integralen.
3. 1 poäng för att partialbråksuppdela rätt.
4. 1 poäng för att beräkna integralen rätt.
5. -1 poäng för att inte förklara sina beräkningar (det krävs definitivt mer förklaringar än i mitt korta svar ovan).
6. -1 poäng för flera enkla beräkningsfel.
7. **MAX 4 POÄNG för detta svar.**

Fråga 3: [Del 2] Låt $f(x)$ vara uniformt kontinuerlig på $[0,1]$. Bevisa att $f(x)$ är Riemann integrerbar. Var noga med att ange alla definitioner du använder dig av.

[FULLSTÄNDIGT BEVIS KRÄVS DU FÅR REFERERA TILL KÄNDA SATSER OM KONTINUERLIGA FUNKTIONER MEN INTE TILL SATSER OM INTEGRERBARHET.] **(6poäng)**

Svar: Vi vill bevisa, enligt definitionen för Riemannintegrerbarhet, att det för varje $\epsilon > 0$ finns två trappfunktioner Θ_ϵ och Ψ_ϵ så att $\Theta_\epsilon \geq f(x) \geq \Psi_\epsilon$ och

$$I(\Theta) - I(\Psi) < \epsilon.$$

Med en trappfunktion på $[0,1]$ avses en funktion som antar ändligt antal värden på $[0,1]$, dvs att det finns $0 = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_k = 1$ så att funktionen är konstant på varje intervall $]x_{n-1}, x_n[$. Om Ψ ar en trappfunktion som antar värdet a_n på intervallet $]x_{n-1}, x_n[$ så definieras

$$I(\Psi) = \sum_{n=1}^{k} a_n(x_n - x_{n-1}).$$

Vi antar att f är uniformt kontinuerlig på $[0,1]$. Detta innebär att det för varje $\epsilon > 0$ finns ett δ_ϵ så att för alla $x, y \in [0,1]$

$$|x - y| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Vi vill använda den definitionen för att, givet ett $\epsilon > 0$, konstruera Ψ_ϵ och Θ_ϵ.

Låt därför $\epsilon > 0$ vara ett givet tal och välj $\delta_{\epsilon/4}$ som i definitionen för uniform kontinuitet.

Vi börjar med att konstruera indelningen $0 = x_0 < x_1 < ... < x_k = 1$ som vi behöver för att konstruera Ψ_ϵ och Θ_ϵ.

Eftersom $\frac{1}{k} \to 0$ då $k \to \infty$ så finns det ett k så att $\frac{1}{k} < \delta_{\epsilon/4}$ - fixera ett av dessa k. Välj $x_n = \frac{n}{k}$, då gäller det uppenbarligen att $0 = x_0 < x_1 < ... < x_k = 1$.

Nu väljer vi värdena som Ψ_ϵ och Θ_ϵ antar på intervallen $]x_{n-1}, x_n[$. Sätt

$$\Psi_\epsilon(x) = f(x_n) - \frac{\epsilon}{4} \quad \text{om } x \in]x_{n-1}, x_n[$$

och

$$\Theta_\epsilon(x) = f(x_n) + \frac{\epsilon}{4} \quad \text{om } x \in]x_{n-1}, x_n[.$$

Enligt konstruktion så gäller det för $x \in]x_{n-1}, x_n[$ att $|x - x_n| < \frac{1}{k} < \delta_{\epsilon/4}$ så för $x \in]x_{n-1}, x_n[$ gäller enligt antagandet om uniform kontinuitet att

$$\Psi_\epsilon(x) = f(x_n) - \frac{\epsilon}{4} < f(x) < f(x_n) + \frac{\epsilon}{4} = \Theta_\epsilon(x).$$

Dvs. $\Psi_\epsilon(x) \leq f(x) \leq \Theta(x)$.

Vi behöver därför bara visa att $I(\Theta_\epsilon) - I(\Psi_\epsilon) < \epsilon$. Enligt definitionen av I så gäller

$$I(\Theta_\epsilon) - I(\Psi_\epsilon) = \sum_{n=1}^{k} \left(f(x_n) + \frac{\epsilon}{4}\right)(x_n - x_{n-1}) - \sum_{n=1}^{k} \left(f(x_n) - \frac{\epsilon}{4}\right)(x_n - x_{n-1}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{k} \frac{\epsilon}{2k} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

vilket skulle bevisas.

Rättningsmall:

1. En del av frågan handlar om att kunna definitionerna så om någon har fått definitionerna (uniformt kont. trappfunktion och Riemann integral) rätt så skall den ha minst 2 poäng.
2. Titta sen övergripande, har studenten visat att den har förstått bevisets helhet? Ge en till 2 poäng för förståelsen som redovisas. Den här uppgiften skall särskilja A och B studenter från resten så dra poäng för "flumande"
3. Slutligen ge 1-2 poäng för stringens. Kan studenten hantera matematisk formalism?

Fråga 4: **[Del 2]** Hitta följande gränsvärde $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{4x^2-4x+8}$. Bevisa ditt svar direkt utifrån $\epsilon - \delta$ definitionen för gränsvärden.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(6poäng)**

Svar: Vi gissar att gränsvärdet är $\frac{1}{4}$. För att bevisa detta så måste vi visa att det för varje $\epsilon > 0$ existerar ett C_ϵ så att

$$x > C_\epsilon \Rightarrow \left|\frac{x^2+3}{4x^2-4x+8} - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{x+1}{4x^2-4x+8}\right| < \epsilon.$$

Observera att om $C_\epsilon > 2$ (vilket vi kommer att antaga) och $x > C_\epsilon$ så kommer $|x+1| < 2x$ och $|4x^2 - 4x + 8| > |2x^2 + 8| > 2x^2$. Därför kommer

$$x > 2 \Rightarrow \left|\frac{x+1}{4x^2 - 4x + 8}\right| < \frac{2x}{2x^2} = \frac{1}{x}.$$

Så för varje $\epsilon > 0$ så kommer

$$x > \max\left(2, \frac{1}{\epsilon}\right) \Rightarrow \left|\frac{x+1}{4x^2 - 4x + 8}\right| < \frac{1}{x} < \epsilon.$$

Vi kan därför välja $C_\epsilon = \max\left(2, \frac{1}{\epsilon}\right)$.

Rättningsmall:

1. 2 poäng för att skriva och använda definitionen rätt.
2. 2 poäng för att inse att man måste inskränka sig till $C_\epsilon > 2$.
3. 2 poäng för att korrekt genomföra beviset.

Fråga 5: [Del 2]

1. Visa, med ett motexempel, att följande påstående är felaktigt: *"Om $f(x)$ är deriverbar på $[0,1]$ och $f(x)$ antar ett lokalt maximum i punkten $x_0 \in [0,1]$ så kommer $f'(x_0) = 0$".*

   [FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(2poäng)**

2. Lägg till ett nytt, och rimligt, antagande som ger ett riktigt påstående och bevisa det nya påståendet. Markera noga vart du använder det nya antagandet.

   [FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(4poäng)**

Svar:

1. Om $f(x) = x$ så är $f(x)$ deriverbar på $[0,1]$. Eftersom f är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet $[0,1]$ så kommer det, enligt sats, att finnas ett x_0 så att $f(x)$ antar sitt maximum. Men $f'(x) = 1$ för alla x så $f'(x_0) = 1 \neq 0$. Påståendet är därför falskt.

2. Eftersom motexemplet hade sitt maximum på randen till området så gissar vi att det extra antagande vi behöver är att $x_0 \in]0,1[$ och modifierar påståendet till:

   "Om $f(x)$ är deriverbar på $[0,1]$ och $f(x)$ antar ett lokalt maximum i punkten $x_0 \in]0,1[$ så kommer $f'(x_0) = 0$".

   Det återstår att bevisa påståendet.

   Vi antar att $f(x)$ är en deriverbar funktion på $[0,1]$ och att $f(x)$ antar ett lokalt maximum i punkten $x_0 \in]0,1[$. Att x_0 är ett lokalt maixmum innebär att $f(x_0) \geq f(x)$ för alla $x \in]x_0 - \kappa, x_0 + \kappa[$ för något $\kappa > 0$. Eftersom x_0 är en inre punkt kan vi, om vi möjligtvis gör κ mindre, antaga att $]x_0 - \kappa, x_0 + \kappa[\subset]0,1[$, observera att vi här använder vårt nya antagande.

   Då $f(x)$ är deriverbar i x_0 följer det att

   $$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0}{h} = f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0}{h}. \tag{4}$$

   Här använder vi implicit slutsatsen att $]x_0 - \kappa, x_0 + \kappa[\subset]0,1[$ i det att vi antar att differenskvoterna i höger och i vänsterled är definierade för godtyckligt små h - dvs vi använder det nya antagandet här.

   Eftersom $f(x_0) \geq f(x_0 + h)$ för alla $|h| < \kappa$ kan vi dra slutsatsen att

   $$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0}{h} \leq 0 \text{ för } h < 0 \tag{5}$$

   och

   $$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \text{ för } h > 0 \tag{6}$$

   då $|h| < \kappa$. Enligt satsen för olikhet i övergång av gränsvärden så följer det, från (5) och (6) insatta i (4), att

   $$0 \geq \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0}{h} = f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$

   Dvs $0 \leq f'(x_0) \leq 0$ vilket skulle bevisas.

Rättningsmall:

1. 1 poäng för att hitta felet i påståendet.
2. 1 poäng för att visa att motexemplet är ett motexempel.
3. 2 poäng om studenten visar att han/hon förstår principen av beviset.
4. 2 poäng för bevisets formella utförande (hänvisar till definitioner etc.)
5. Totalt max 2 poäng för beviset om studenten inte påpekar vart det nya antagandet används.

Fråga 6: **[Del 2]** Det är Juni år 1815 och utanför Waterloo förbereder sig Napoleons, Wellingtons och Blüchers arméer för drabbning. Napoleon har satt upp följande matematiska modell för det kommande slaget:

$$\begin{aligned} E'(t) &= -\tfrac{s}{10}F(t) \\ P'(t) &= -\tfrac{(1-s)}{10}F(t) \\ F'(t) &= -\tfrac{s}{10}E(t) - \tfrac{3(1-s)}{20}P(t) \end{aligned}$$

där $F(t)$, $E(t)$ och $P(t)$ är antalet soldater i den Franska, Engelska och Preussiska armen t timmar efter slagets början. Parametern $s \in [0,1]$ anger hur stor andel av den Franska hären Napoleon avsätter för att angripa Wellingtons engelska styrkor. Vid slagets början gäller $F(0) = 100.000$, $E(0) = 60.000$ och $P(0) = 40.000$.

Härled en formel som anger hur många franska soldater, som en funktion av s, som lever en timme efter slaget har börjat. Dvs. beräkna $F(1)$ som en funktion av s.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(6poäng)**

Svar: Vi härleder en andra ordningens differential ekvation för $F(t)$ genom att derivera den tredje ekvationen med avseende på t:

$$F''(t) = -\frac{s}{10}E'(t) - \frac{3(1-s)}{20}P'(t) = \left\{ \begin{array}{l} \text{använd de två} \\ \text{första ekv.} \end{array} \right\} = \frac{s^2}{100}F(t) + \frac{3(1-s)^2}{200}F(t) = \left(\frac{5s^2-6s+3}{200}\right)F(t).$$

Så $F(t)$ uppfyller

$$F''(t) - \alpha^2 F(t) = 0, \tag{7}$$

där $\alpha = \sqrt{\frac{5s^2-6s+3}{200}}$ vilken är väldefinierad då uttrycket under kvadratroten alltid är positivt.

Vidare så gäller det att $F(0) = 100.000$ och enligt den tredje ekvationen att

$$F'(0) = -\frac{s}{10}E(0) - \frac{3(1-s)}{20}P(0) = -6000s - 6000(1-s) = -6000,$$

där vi använde att $E(0) = 60.000$ och $P(0) = 40.000$.

Ekvation (7) har den allmänna lösningen $Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}$. Initialdata ger att $F(0) = A + B = 100.000$ och $F'(0) = \alpha A - \alpha B = -6000$ varur man enkelt beräknar $A = 50.000 - \frac{3000}{\alpha}$ och $B = 50.000 + \frac{3000}{\alpha}$. Lösningen till initialvärdesproblemet blir således

$$F(t) = \left(50.000 - \frac{30.000\sqrt{2}}{\sqrt{5s^2-6s+3}}\right)e^{\frac{\sqrt{5s^2-6s+3}}{10\sqrt{2}}t} + \left(50.000 + \frac{30.000\sqrt{2}}{\sqrt{5s^2-6s+3}}\right)e^{-\frac{\sqrt{5s^2-6s+3}}{10\sqrt{2}}t}.$$

$F(1)$ som funktion av s blir därför:

$$\left(50.000 - \frac{30.000\sqrt{2}}{\sqrt{5s^2-6s+3}}\right)e^{\frac{\sqrt{5s^2-6s+3}}{10\sqrt{2}}} + \left(50.000 + \frac{30.000\sqrt{2}}{\sqrt{5s^2-6s+3}}\right)e^{-\frac{\sqrt{5s^2-6s+3}}{10\sqrt{2}}}$$

Rättningsmall:

1. Det viktiga i uppgiften är att se om studenten kan skapa matematik i situationer som han/hon inte har sett tidigare. Ge därför 2 poäng för att härleda en andra ordningens diff ekvation för F.
2. 2 poäng för att hitta rätt initialdata (dvs ekvationer för $F(0)$ och $F'(0)$).
3. 2 poäng för att kunna beräkna $F(1)$ som en funktion av s.
4. -1 poäng för fler än ett enkelt beräkningsfel.
5. -1 poäng för varje allvarligt beräkningsfel.

Kommentar: Matematisk kreativitet i all ära. men det viktiga med det här talet är naturligtvis att general Blücher var övertygad om att han var havande med en elefant vid tiden för slaget vid Waterloo. Detta är det viktigaste jag har att lära ut och blir därför det sista ordet i den här kursen.