

Svar till Uppgifter v47 del 1 SF1602 Diff. Int.

3: Svar till kortuppgifter:

i) Om $f(x)$ är en kontinuerlig funktion på $\mathbb{R}$ så att $f(x) \leq 10$ kommer då $\int_{-2}^1 f(x)dx \leq 30$? Kommer $\int_{-2}^1 f^2(x)dx \leq 300$?

Svar: $\int_{-2}^1 f(x)dx \leq 30$ eftersom $\int_{-2}^1 f(x)dx \leq \int_{-2}^1 10dx \leq 30$. Det andra påståendet är inte sant. (Motexempel $f = -100 \leq 10$.)

ii) Om $f(x)$ är en kontinuerlig funktion på $]0, \infty[$ så att $|f(x)| \leq |x|^\alpha$ för alla $x > 0$. För vilka värden på $a > 0$ och α kommer $\int_a^\infty |f(x)|^2 dx$ garanterat att vara konvergent?

Svar: Om $a > 0$ så konvergerar integralen för $\alpha < -1/2$. Om $a = 0$ så är integralen divergent för alla α .

iii) Är sats 11 på sidan 316 sats sann utan antagandet $f \geq 0$?

Svar: Nej (Tex om $f(x) = -\frac{1}{x}$ så är $f < g = 0$ och $\int_0^\infty g(x)$ är konvergent men $\int_0^\infty f(x)dx$ är divergent.)

iv) **Svar?** Låt $f(x)$ vara integrerbar på $[-1, 1]$ och $f(0) = 0$. Är den generaliserade integralen $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{x} dx$ konvergent om $f(x)$ är begränsad? Kontinuerlig (LEDTRÅD: Är $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln(|x|)} & \text{om } x \neq 0 \\ 0 & \text{om } x = 0 \end{cases}$ kontinuerlig)? Deriverbar?

Svar: Divergent i allmänhet om f är begränsad eller kontinuerlig (exemplet i ledtråden är kontinuerlig). Men om f är deriverbar så kommer $f(x)/x$ att vara begränsad så integralen blir konvergent.

v) Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på $[0, 1]$ och att den generaliserade integralen $\int_0^1 \frac{|f(x)|}{x} dx$ konvergerar. Kommer då $\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x} dx$ att konvergera?

Svar: Ja!

vi) Vi vet att $1 - |x|$ inte är primitiv funktion till någon funktion definierad på $[-1, 1]$ (eftersom derivatan av $1 - |x|$ inte är definierad i $x = 0$). Men finns det någon funktion $f(x)$ så att $1 - |x| = \int_{-1}^x f(t)dt$? Reflektera!

Svar: Ja det finns en sådan funktion. Reflektionen är att integralen är mer generell än primitiva funktionen. Detta leder till möjligheten att definiera ett mer generellt derivatabegrepp. Men det är något som vi måste lämna till en annan kurs.

vii) Vilken kurva i planet är $(\sin(t), \cos(t))$ för $t \in [0, 2\pi[$? Vilken kurva är $(2\sin(t), 3\cos(t))$ för $t \in [0, 2\pi[$? Vilken kurva är $(\sin(t), \cos(t))$ för $t \in [0, 4\pi[$?

Svar: Första kurvan ger en cirkel i planet, den andra en ellips och den tredje ger en cirkel genomlöpt två varv.

viii) Rotationsvolymen som fås när området mellan grafen av den kontinuerliga funktionen $f(x)$, $a \leq x \leq b$ roteras kring x -axeln är noll. Vad är $f(x)$?

Svar: 0 (Rotationsvolymen är $\int_a^b \pi f^2(x)dx$ vilken är lika med noll endast om $f(x) = 0$ (här använder vi kontinuitet) eller $a = b$)

ix) Finns det någon rotationssymmetrisk kropp given av en deriverbar funktion $f(x)$ på $[0, \infty[$ så att kroppens yta är oändlig men dess volym ändlig?

Svar: Ja (tex $f(x) = \frac{1}{1+x}$.)

x) Finns det någon rotationssymmetrisk kropp given av en begränsad och deriverbar funktion $f(x)$ på $[0, \infty[$ så att kroppens volym är oändlig men dess yta ändlig?

LEDTRÅD: Eftersom $f'(x)^2 \geq 0$ så kommer $\sqrt{1 + f'(x)^2} \geq 1$.

Svar: Nej

7: Bevisuppgift 1: Vi säger att en funktion $f(x)$ definierad på $[a, b]$ är styckvis kontinuerlig om det finns ändligt många punkter $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ så att $f(x)$ är kontinuerlig på intervallen $]a, x_1[$, $]x_1, x_2[$, $]x_2, x_3[$, ... och $]x_n, b[$.

1. I Persson-Böiers på sidan 299 hävdas det att varje styckvis kontinuerlig funktion är integrerbar. Visa med ett motexempel att det inte är sant.

LEDTRÅD: Titta på nästa delfråga.

2. Visa att varje styckvis kontinuerlig och begränsad funktion $f(x)$ på $[a, b]$ är integrerbar. Använd gärna följande steg:
 - (a) Visa det för varje $\epsilon > 0$ och $\delta > 0$ finns trappfunktioner $\Psi_i(x)$ och $\Theta_i(x)$ definierade på $[a, b]$, $\Psi_i(x) = \Theta_i(x) = 0$ för $x \notin [x_i + \delta, x_{i+1} - \delta]$, så att $\Psi(x) \leq f(x) \leq \Theta(x)$ på $[x_i + \delta, x_{i+1} - \delta]$ och $I(\theta) - I(\Psi) < \epsilon/(2n)$.
 - (b) Givet ett $\delta > 0$. Visa att om $|f(x)| \leq M$ så finns det trappfunktioner $\Psi_d(x)$ och $\Theta_d(x)$ ("d" står för diskontinuerlig), så att $\Psi_d(x) = \Theta_d(x) = 0$ för $x \notin [x_i - \delta, x_i + \delta]$ för något $i = 1, 2, \dots, n$, så att $\Psi_d(x) \leq f(x) \leq \Theta_d(x)$ för alla $x \in [x_i - \delta, x_i + \delta]$ för något $i = 1, 2, \dots, n$ och $I(\Theta_d) - I(\Psi_d) \leq 4nM\delta$.
 - (c) Visa att $\Psi(x) = \Psi_d + \sum_{i=1}^n \Psi_i(x)$ och $\Theta(x) = \Theta_d(x) + \sum_{i=1}^n \Theta_i(x)$ är trappfunktioner. Visa också att givet ett $\epsilon > 0$ så kan du välja $\delta > 0$ så att $I(\Theta) - I(\Psi) < \epsilon$.

Svar:

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{för } x \neq 0 \\ 0 & \text{för } x = 0 \end{cases}$ är styckvis kontinuerlig på $[-1, 1]$ men inte integrerbar.
2. (a) Eftersom $f(x)$ är kontinuerlig på $[x_i + \delta, x_{i+1} - \delta]$ så är $f(x)$ integrerbar på intervallet $[x_i + \delta, x_{i+1} - \delta]$. Men att f är integrerbar på $[x_i + \delta, x_{i+1} - \delta]$ implicerar påståendet.
 (b) Vi väljer

$$\Psi(x) = \begin{cases} -M & \text{om } x \in]x_i - \delta, x_i + \delta[\text{ för något } i \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

och

$$\Theta(x) = \begin{cases} M & \text{om } x \in]x_i - \delta, x_i + \delta[\text{ för något } i \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Det är uppenbart Ψ och Θ uppfyller villkoren.

- (c) Vi har att $\Psi_d + \sum_{i=1}^n \Psi_i \leq f \leq \Theta_d + \sum_{i=1}^n \Theta_i$ och $I(\Theta_d + \sum_{i=1}^n \Theta_i) - I(\Psi_d + \sum_{i=1}^n \Psi_i) = I(\Theta_d) - I(\Psi_d) + \sum_{i=1}^n (I(\Theta_i) - I(\Psi_i)) \leq \frac{\epsilon}{2} + 4nM\delta$. Om vi väljer $\delta < \frac{\epsilon}{8nM}$ så följer det att $I(\Theta_d + \sum_{i=1}^n \Theta_i) - I(\Psi_d + \sum_{i=1}^n \Psi_i) < \epsilon$. Detta implicerar att $f(x)$ är integrerbar.

8: Bevisuppgift 2 (Konceptuellt svår och utanför den här kursen.) I den här uppgiften så är alla funktioner definierade på $[0, 1]$. För varje begränsad funktion f så låter vi $\|f\|$ vara det minsta icke negativa tal så att $-\|f\| \leq f(x) \leq \|f\|$ för alla $x \in [0, 1]$. Vi definierar avståndet mellan två funktioner $f(x)$ och $g(x)$ som $\|f(x) - g(x)\|$.

Vidare så säger vi att en sekvens funktioner $f_k(x)$ konvergerar till $f(x)$ när k går mot oändligheten, eller $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$ om det för varje $\epsilon > 0$ existerar ett $N_\epsilon > 0$ så att

$$\|f_k(x) - f(x)\| < \epsilon \quad \text{för alla } k > N_\epsilon.$$

Visa att om $f_k(x)$ är en sekvens kontinuerliga funktioner och $f(x)$ är en funktion så att $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$ då är $f(x)$ integrerbar.

Svar: Eftersom $f_k \rightarrow f$ så finns det ett K så att $\|f_k - f\| < \epsilon/4$ för alla $k > K$. Och eftersom f_{K+1} är integrerbar så finns det två trappfunktioner $\Psi_{\epsilon/2} \leq f \leq \Theta_{\epsilon/2}$ så att $I(\Theta_{\epsilon/2}) - I(\Psi_{\epsilon/2}) < \epsilon/2$.

Per definition så implicerar $\|f - f_{K+1}\| < \epsilon/4$ att $f_{K+1} - \frac{\epsilon}{4} < f < f_{K+1} + \frac{\epsilon}{4}$. Dvs

$$\Psi_{\epsilon/2} - \frac{\epsilon}{4} < f < \Theta_{\epsilon/2} + \frac{\epsilon}{4} \quad (1)$$

och $\Psi_{\epsilon/2} - \frac{\epsilon}{4}$ och $\Theta_{\epsilon/2} + \frac{\epsilon}{4}$ är trappfunktioner.

Vi har således bevisat att det finns trappfunktioner $\Psi_{\epsilon/2} - \frac{\epsilon}{4}$ och $\Theta_{\epsilon/2} + \frac{\epsilon}{4}$ så att (1) gäller och $I(\Theta_{\epsilon/2} + \frac{\epsilon}{4}) - I(\Psi_{\epsilon/2} - \frac{\epsilon}{4}) < \epsilon$.

9: Tentamensfråga: [Del 1, Modul 3]

1. Låt $f(x)$ vara deriverbar på $\mathbb{R}$ och $F(x) = \int f(x)dx$. Ange ett villkår på $f(x)$ som garanterar att $F(x)$ är strikt konvex. [ANGE VILLKÅRET.] **(1poäng)**
2. Ange en funktion $f(x)$ som är växande men $\int f(x)dx$ avtagande? [SVARA MED ATT ANGE FUNKTIONEN.] **(1poäng)**
3. Bestäm alla primitiva funktioner till

$$\int \frac{5}{(x+3)^2} \sqrt{\frac{x+3}{x+2}}.$$

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(4poäng)**

Tentamensfrågorna är publicerade på examinationssidan.

10: Hitta alla primitiva funktioner till $\frac{a}{b+c\sin(x)}$ och $b^2 > c^2$. Markera tydligt var du använder $b^2 > c^2$.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(6poäng)**