

Svar Till Uppgifter v49 del 1 SF1602 Diff. Int.

3: Kortuppgifter

i) Rita grafen av två funktioner $f(x)$ och $g(x)$, definierade på $[-1, 1]$, så att $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$ för alla n men $f(1/2) \neq g(1/2)$?

Svar: Orkar inte! (Tyvärr så kommer det här svaret inte att ge poäng på tentan...)

ii) Kan man, för varje $C > 0$ och $\epsilon > 0$, hitta en funktion $f_{C,\epsilon}(x)$ definierad på hela $\mathbb{R}$ så att

$$|f_{C,\epsilon}(x) - p_8(x)| > C \quad \text{för något } |x| < \epsilon$$

där $p_8(x)$ är Maclaurinpolynomet av ordning 8 till $f_{C,\epsilon}$. Vad betyder detta?

Svar: Ja. Låt $f_{C,\epsilon}(x) = Mx^9$ då blir Maclaurinpolynomet av ordning 8 till $f_{C,\epsilon}$ identiskt lika med noll (dvs $p_8(x) = 0$) eftersom de första åtta derivatorna till $f_{C,\epsilon}$ är lika med noll. Men $f_{C,\epsilon}(x_0) = \frac{M\epsilon^9}{2^9}$ för $x_0 = \epsilon/2$ och om $M > 2^9 C / \epsilon^9$ så kommer därför $|f_{C,\epsilon}(x_0) - p_8(x_0)| > C$ så det finns definitivt f som i uppgiften.

Detta betyder att resttermen är väldigt nödvändig när man använder Taylor serier för att approximera funktioner. Om man inte kan kontrollera resttermen så kan ens approximation råka vara otroligt dålig (säg $C = 10^{10}$) även när man är otroligt nära punkten man vill approximera funktionen i (säg $\epsilon = 10^{-10}$).

iii) Om tredje ordningens Maclaurinpolynom till $f(x)$ är $p(x) = 1 + 3x^2 + \frac{1}{2}x^3$ vad är fjärde ordningens Maclaurinpolynom till funktionen $F(x) = \int_0^x f(t)dt$?

Svar: $F(x) = x + x^3 + \frac{x^4}{8} + R(x)x^5$.

iv) Om Maclaurinpolynomet av ordning tre till $f(x)$ är $p(x) = 2 + x^2$ vad är Maclaurinpolynomet till ordning tre till $g(x) = f(x^2)$?

Svar: 2 (Observera att $f(t) = 2 + t^2 + R_3(t)t^3$ vilket ger, med $t = x^2$, $f(x^2) = 2 + x^4 + R_3(x^2)x^6$ så den enda termen av grad lägre än tre är 2.)

v) Om $f(x)$ har Maclaurinpolynomet $p_2(x) = 2 + x + x^2$ vad är då andra ordningens Taylorpolynom i punkten $x = 2$ till $f(x - 2)$?

Svar: $p(x) = 2 + (x - 2) + (x - 2)^2$.

vi) Om $f(x)$ är udda och deriverbar till ordning 5, vad är då $f''(0)$, $f^{(4)}(0)$?

Svar: 0 i båda fallen.

vii) Om $f(x)$ är kontinuerligt deriverbar på $\mathbb{R}$, måste då $|f(x) - f(0)| \leq M|x|$ där $M = \max_{|\xi| \leq |x|} |f'(\xi)|$? Varför, varför inte?

Om $f(x)$ är två gånger kontinuerligt deriverbar på $\mathbb{R}$, måste då $|f(x) - f(0) - f'(0)x| \leq M|x|^2$ där $M = \max_{|\xi| \leq |x|} \frac{|f''(\xi)|}{2}$? Varför, varför inte?

Svar: Ja i båda fallen. Det första följer av medelvärdessatsen och det andra av att $g_{\pm}(x) = f(x) - f(0) - f'(0)x \pm M|x|^2$ är en konkav/konvex funktion med värde noll i den enda stationära punkten.

viii) Om $f(x)$ har kontinuerliga derivator av alla ordningar på $\mathbb{R}$ och $|f(x) - ((x - 3) + (x - 3)^4)| \leq 12|x - 3|^7$ vilken är den högsta ordningens Taylorpolynom vi kan ange för $f(x)$, i punkten $x = 3$, baserat på den givna informationen. Vad är Taylorpolynomet till $f(x)$ av den största ordning som vi kan vara säkra på?

Svar: Största vi kan vara säkra på är ordning 6 och Taylorpolynomet av ordning 6 är $(x - 3) + (x - 3)^4$.

ix) Om Taylorpolynomet av ordning tre i punkten $x = 1$ till $f(x)$ är $p_3(x) = -4 + (x - 1) + \frac{1}{6}(x - 1)^3$, kan vi utifrån denna information beräkna $f^{(3)}(0) = 0$? $f(x)$ är tre gånger kontinuerligt deriverbar i hela $\mathbb{R}$.

Svar: Nej, taylorpolynomet ger bara information lokalt (nära punkten $x = 1$).

x) Antag att $f(x)$ är kontinuerligt deriverbar på $\mathbb{R}$ och att Taylorpolynomet av ordning tre i punkten $x = a$ är $p_3(x) = 6 + x + 4x^3$, för alla punkter $a \in \mathbb{R}$, vilken funktion är $f(x)$?

Svar: $f(x) = 6 + x + 4x^3$

Tentamensfråga: [Del 1, Modul 5]

1. Låt $f(x)$ vara en lösning till följande differential ekvation $f'(x) = f(x)^3$, och $f(0) = a$. För vilka a är $f(x)$ garanterat strikt växande. [ANGE ALLA VÄRDEN a .] (1poäng)

2. Hur många lösningar har följande differentialekvation: $(y')^2 = \cos(x) - 3$.

[SVARA MED ETT TAL ELLER "OÄNDLIGT MÅNGA".] (1poäng)

3. Lös följande differentialekvation:

$$y' + (1 + y^2)x^2 = 0.$$

Med initialdata $y(0) = 1$. För vilka x är lösningen definierad?

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] (4poäng)

Tentamensfråga: [Del 2] En kanon skjuter en kula med vinkeln $\pi/4$ radianer mätt av i relation till markplanet, som ges av $y = 0$, kulans hastighet vid tiden $t = 0$ är $\sqrt{2}$. Om kulans position vid tidpunkten t ges av $(x(t), y(t))$. Kulans hastighet i y -riktningen bestäms för $t > 0$ av Newtons ekvation $y''(t) = -1$, $y(0) = 0$ och kulans hastighet antas vara konstant i x -riktningen. Beräkna hur långt kulan färdas från att den avfyras i $t = 0$ tills den träffar markplanet $y = 0$.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] (6poäng)

Tentamensfrågorna har publicerats med svar på examinationssidan.