

## Svar till vissa uppgifter från den andra veckan.

Detta dokument innehåller svar till uppgift 7 och 8 från andra veckans blad.

**7:** Bevisa Sinussatsen genom att använda Areasatsen.

**Svar:** Sinussatsen säger att relationen mellan en triangelns vinklar  $\alpha, \beta$  och  $\gamma$  och vinklarnas motstående sidor  $a, b$  och  $c$  uppfyller följande relation:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}. \quad (1)$$

Vi vill bevisa (1) genom att använda areasatsen vilken säger att arean,  $A$ , av en triangel kan beräknas enligt

$$A = \frac{1}{2}bc \sin(\alpha) \quad A = \frac{1}{2}ac \sin(\beta) \quad \text{och} \quad A = \frac{1}{2}ab \sin(\gamma). \quad (2)$$

Genom att använda de första två relationerna i (2) så får vi

$$\frac{1}{2}bc \sin(\alpha) = A = \frac{1}{2}ac \sin(\beta) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}, \quad (3)$$

där vi delade höger och vänsterled med  $\frac{abc}{2}$ . Observera att likheten i (3) är första likheten i Sinussatsen (1). Den andra likheten visas på samma sätt.  $\square$

**8: Problemuppgift:** En klockmakare har tillverkat ett pendelur där pendeln är menad att ha svängningstid på en sekund. Han hoppas att pendeln efter  $t > 0$  sekunder från att klockan startar (vid  $t = 0$ ) ska vara  $f(t) = 10 \sin(2\pi t)$  radianer från viloläget. Efter 24 timmar så mäter han så pendelrörelsen så noggrant han kan (med 4 siffror) och konstaterar att pendelns position ges av

$$f(t) = 2\sqrt{20} \sin(2\pi t) + 4 \cos(2\pi t). \quad (4)$$

Klockmakaren, som är helt säker på att klockan inte går mer än ett par hundradelar fel efter ett dygn, ber dig uppskatta hur lång tid det kommer att ta för klockan att gå en hel minut fel.

**Svar:** Förhoppningsvis så har ni inte sätt någon liknande uppgift tidigare kände er lite chockade när ni läste den. Förhoppningsvis så kunde ni också lösa uppgiften själva genom att ta det lugnt och resonera er genom svaret. Jag tänker på följande sätt.

För det första så är det inte jättelätt att veta hur man ska börja lösningen. Men det finns en sektion i Persson-Böjers kallad 'omskrivning med hjälpvinkel' (sid 108). Den hjälper oss att skriva om uttrycket (4) på ett sätt som **kanske** hjälper oss att hitta ett svar. Använder omskrivning med hjälpvinkel:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2\sqrt{20} \sin(2\pi t) + 4 \cos(2\pi t) = \sqrt{96} \left( \frac{2\sqrt{20}}{\sqrt{96}} \sin(2\pi t) + \frac{4}{\sqrt{96}} \cos(2\pi t) \right) = \\ &= \sqrt{96} (\cos(\delta) \sin(2\pi t) + \sin(\delta) \cos(2\pi t)), \end{aligned}$$

där

$$\cos(\delta) = \frac{2\sqrt{20}}{\sqrt{96}} = \sqrt{\frac{5}{6}} \Rightarrow \delta \approx 0.4205.$$

Enligt formeln för den dubbla vinkeln så mäter alltså klockmakaren, efter 24 timmar, att

$$f(t) \approx \sqrt{96} \sin(2\pi t + \delta), \text{ där } \delta \approx 0.4205.$$

Vi märker direkt två saker. För det första så svänger inte pendeln ut till 10 radianer utan endast till  $\sqrt{96}$  radianer så det är lite friktion i klockan. Detta är dock inte direkt relevant för den här uppgiften så vi kan lämna det åt sidan.

Det andra vi märker är att efter 24 timmar, eller 86400 sekunder, så har den totala vinkeln förändrats med ca  $0.4205 + 2\pi k$ , för något heltal  $k$ , radianer mer än vad klockmakaren hade räknat med. Vi får den extra termen  $2\pi k$  eftersom

$$\sqrt{96} \sin(2\pi t + \delta) = \sqrt{96} \sin(2\pi t + \delta + 2\pi k) \quad (5)$$

och vi kan inte direkt avgöra hur många hela cykler som klockan har dragit sig. Det är uppenbart att en hel svängning inte är exakt en sekund.

Eftersom urmakaren är säker på att klockan går som mest ett par hundra delar fel så kan vi sätta  $k = 0$ , för om  $k$  vore skilt från noll så skulle klockan ha svängt minst en gång för mycket eller för lite vilket betyder att den går ca 1 sekund fel.

Vi ser från (5), med  $k = 0$ , att fösskjutningen i fas är ca 0.4205 radianer. Så efter 86400 sekunder när klockmakaren har avsett att argumentet i sinusfunktionen i  $10 \sin(2\pi t)$  ska ha ökat med  $86400 \times 2\pi$  så har det egentligen ökat med  $86400 \times 2\pi + 0.4205$ . Men en argumentökning med  $2\pi$  innebär att pendeln gör en hel cykel och klockan räknar en sekund. Detta innebär att klockan, som ligger 0.4205 radianer före, har räknat  $0.4205/(2\pi) \approx 0.06692$  sekunder mer än verkligheten.

Så på 24 timmar så går klockan 0.06692 sekunder för fort. För att klockan skall gå en minut för fort behövs därför

$$\frac{1 \text{ minut}}{0.06692 \text{ sekunder per dag}} = 896.5 \text{ dagar.}$$

Så klockan kommer att gå en minut före om 896.5 dagar vilket är vårt svar.