

Svar till uppgifter 42 SF1602 Diff. Int.

Svar kortuppgifter.

3:

i) Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[0, 1]$ kan man då skriva $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{1}{k} f(n/k)$ på ett enklare sätt?

Svar: Ja, detta är $\int_0^1 f(x) dx$. (Rita en bild med grafen av $f(x)$ och varje term i summan $\sum_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{1}{k} f(n/k)$ som en rektangel med bas $[(n-1)/k, n/k]$ och höjd $f(n/k)$ om k är hyfsat stort, säg $k = 10$, så blir det intuitivt klart att summan approximerar ytan under grafen.)

ii) Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[-1, 1]$ och $-1 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < x_{n+1} \dots < 1$ är punkter så att $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ kommer då $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| f(x_n) = \int_{-1}^1 f(x) dx$?

Svar: Nej. (Den här är lite knepig förstod jag när vi diskuterade den på föreläsningen. Men för att en uppdelning $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ ska ge en bra approximation till $\int_a^b f(x) dx$ så måste avståndet mellan x_j och x_{j+1} vara litet för alla j . Men om sekvensen i uppgiften är tex $x_j = 1 - 1/j$ för $j \in \mathbb{N}$ och $x_0 = -1$ så kommer vi bara att ha ett intervall i området $[-1, 0]$. Rita gärna grafen av $f(x)$ och ytan $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| f(x_n)$. Då kommer du att se att Ψ är en dålig approximation av $f(x)$ om $f(x)$ inte $f(x)$ är nästan konstant i $[-1, 0]$)

iii) Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[0, \infty]$ kommer då $\int_0^{\infty} f(x) dx$ att existera? Kommer, för varje tal $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a \geq 0$, $\int_a^b f(x) dx$ att existera?

Svar: $\int_0^{\infty} f(x) dx$ existerar inte som en generaliserad integral i allmänhet (ta tex $f(x) = 1$ vilken är kontinuerlig men $\lim_{X \rightarrow \infty} \int_0^X f(x) dx$ divergerar). Att $\int_a^b f(x) dx$ existerar följer direkt av a att $f(x)$ är kontinuerlig (Sats i boken).

iv) Låt $f_1, f_2, f_3, \dots$ vara en oändlig mängd kontinuerliga funktioner definierade på $[0, 1]$, kommer då $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx$?

Svar: Nej. (Det här är en lite elak uppgift då den går lite utanför kursen men jag ville ha med den för att visa att det finns mer att göra i analysen. Vi har visat att det finns en relation mellan derivatan och integralen - men det finns många andra relationer att undersöka: tex. när man har rätt att byta ordning på oändliga serier och integraltecknet. Här så skulle vi kunna tänka oss att $f_n(x) = \cos(x/\pi)$ för alla n . Då är $\int_0^1 f_n(x) dx = 0$ för alla n men summan till höger blir $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(x/\pi)$ vilken naturligtvis divergerar för alla $x \neq 1/2$ så summan (och således integralen) till höger är inte meningsfull.)

v) Om $f(x)$ är integrerbar och begränsad på $[-5, 5]$ finns det då ett tal c så att $10c = \int_{-5}^5 f(x) dx$? Finns det ett $x_c \in [-5, 5]$ så att $f(x_c) = c$?

Svar: Absolut, $c = \frac{1}{10} \int_{-5}^5 f(x) dx$. Det finns dock inte nödvändigtvis något x_c så att $f(x_c) = c$. För det behövs kontinuitet. Ett motexempel skulle vara $f(x) = -1$ för $x < 0$ och $f(x) = 1$ för $x > 0$ då är $c = 0$ men $f(x) \neq 0$ för alla x . Observera att detta innebär att antagandet att $f(x)$ är kontinuerlig i integralkalkylens medelvärdessats är nödvändigt. Och eftersom vi använder integralkalkylens medelvärdessats i beviset av analysens huvudsats så är kontinuitetsantagandet nödvändigt även där.

vi) För vilka integrerbara funktioner $f(x)$ gäller $\left| \int_{-3}^4 f(x) dx \right| = \int_{-3}^4 |f(x)| dx$?

Svar: Den här frågan är lite knepig. Om $f(x)$ är kontinuerlig så är svaret om antingen $f(x) \geq 0$ eller om $f(x) \leq 0$. Men om $f(x)$ är styckvis kontinuerlig så räcker det med att $f(x) \geq 0$ eller $f(x) \leq 0$ för alla utom ett ändligt antal punkter.

vii) Antag att $f(x)$ och $g(x) \geq 0$ är deriverbara på $[0, \infty]$, vad är $D \int_0^{g(x)} f(t) dt$? Kan vi försvaga något antagande och dra samma slutsats?

Svar: $g'(x)f(g(x))$. Observera att vi kan definiera $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, då är uttrycket i uppgiften $F(g(x))$ och vårt svar följer av analysens huvudsats och kedjeregeln. För det argumentet så behöver $f(x)$ inte vara deriverbar. Vi kan försvaga det antagandet till $f(x)$ kontinuerlig.

viii) Om $f(1) = -1$ och $\int_1^5 f'(x)dx = 2$ vad är $f(5)$?

Svar: $f(5) = 1$. Detta eftersom $2 = \int_1^5 f'(x)dx = f(5) - f(1) = f(5) + 1$.

ix) Gäller den generaliserade medelvärdessatsen utan antagandet $g \geq 0$? Om inte hitta på ett motexempel.

Svar: Nej den gäller inte. Tex om $g(x) = \sin(x)$ och $f(x) = x$, $a = -1$ och $b = 1$. Då är $f(\xi) \int_{-1}^1 g(x) = 0$ för alla ξ men $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx > 0$ då integranden är strikt positiv i alla punkter förutom $x = 0$.

x) Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$ så $D \int_a^x f(t)dt = f(x)$ enligt analysens huvudsats. Låt

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{om } x < 0 \\ 0 & \text{om } x = 0 \\ 1 & \text{om } x > 0 \end{cases}$$

och $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$. För vilka x är $F'(x)$ definierad, vad är värdet av $F'(x)$ i dessa punkter? Är höger respektive vänsterderivatan definierad, vad är värdet av höger och vänsterderivatan i så fall?

Svar: $F'(x)$ är definierad för $x \neq 0$ (dvs där $f(x)$ är kontinuerlig). Höger och vänsterderivatan är dock definierad överallt, detta följer direkt från höger och vänsterderivatans definition.

7: Bevisuppgift 1 (Hölders olikhet): Bevisa Hölders olikhet. Dvs om $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga på $[0, 1]$ så

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx \leq \left(\int_{-1}^1 f(x)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-1}^1 g(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Använd gärna följande steg:

1. Visa att $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 f(x)^2 dx + \int_{-1}^1 g(x)^2 dx \right)$.

LEDTRÅD: Kan du visa olikheten utan integraltecknen?

2. Bevisa att om $\int_{-1}^1 f(x)^2 dx = 1$ och $\int_{-1}^1 g(x)^2 dx = 1$ så kommer $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx \leq 1$.

LEDTRÅD: Föregående steg.

3. Beteckna $\|f\|_{L^2(-1,1)} = \left(\int_{-1}^1 f(x)^2 dx \right)^{1/2}$ och låt $\tilde{f}(x) = \frac{1}{\|f\|_{L^2(-1,1)}} f(x)$ samt $\tilde{g}(x) = \frac{1}{\|g\|_{L^2(-1,1)}} g(x)$.

Kan man använda föregående steg på $\tilde{f}$ och $\tilde{g}$? Vad betyder det för f och g ?

Bevis:

1. För alla x så gäller $0 \leq (f(x) - g(x))^2 = f^2(x) - 2f(x)g(x) + g^2(x)$ så, för alla x , $f(x)g(x) \leq \frac{1}{2}f^2(x) + \frac{1}{2}g^2(x)$. Så

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 f(x)^2 dx + \int_{-1}^1 g(x)^2 dx \right)$$

enligt Sats 5 p. 302 i Persson-Böiers.

2. Detta är en direkt konsekvens av föregående steg.

3. Vi beräknar

$$\int_{-1}^1 \tilde{f}^2(x) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{f(x)}{\|f\|_{L^2(-1,1)}} \right)^2 dx = \frac{1}{\|f\|_{L^2(-1,1)}^2} \int_{-1}^1 f^2(x) dx = 1,$$

där vi använde att $\|f\|_{L^2(-1,1)}^2 = \int_{-1}^1 f(x)^2 dx$.

På samma sätt så är $\int_{-1}^1 \tilde{g}^2(x) dx = 1$. Så enligt föregående steg så är

$$\int_{-1}^1 \tilde{f}(x) \tilde{g}(x) dx \leq 1$$

men detta är samma sak, eftersom $\tilde{f}(x) = \frac{1}{\|f\|_{L^2(-1,1)}} f(x)$ samt $\tilde{g}(x) = \frac{1}{\|g\|_{L^2(-1,1)}} g(x)$, som

$$\frac{1}{\|f\|_{L^2(-1,1)} \|g\|_{L^2(-1,1)}} \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx \leq 1$$

eller

$$\int_{-1}^1 f(x) g(x) dx \leq \|f\|_{L^2(-1,1)} \|g\|_{L^2(-1,1)} = \left(\int_{-1}^1 f(x)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-1}^1 g(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

vilket var det vi skulle bevisa.

Kommentar: Mycket av det vi gör i Diff-Inten är möjligt att generalisera. Här så luktar vi lite på en generalisering till av analysen till funktioner. Detta ingår inte riktigt i kursen men det kan vara bra att se vad som kommer senare. Notationen $\|f(x)\|_{L^2(-1,1)}$ kallas L^2 -normen ("Ell två normen") av $f(x)$. Det är ett sätt att mäta avstånd mellan funktioner. Intuitivt så är funktionen $f(x)$ är nära $g(x)$ om $\|f(x) - g(x)\|_{L^2(-1,1)} = \left(\int_{-1}^1 (f(x) - g(x))^2 dx \right)^{1/2}$ är liten. Med den intuitionen så kan vi definiera gränsvärden av sekvenser av funktioner. Tex så skulle vi kunna säga att sekvensen av funktioner $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_k(x), \dots$ konvergerar mot funktionen $f(x)$ om det för varje $\epsilon > 0$ existerar ett $N > 0$ så att

$$\|f_k(x) - f(x)\|_{L^2(-1,1)} < \epsilon \quad \text{för alla } k > N.$$

Detta är samma definition som vi är vana vid men nu pratar vi om funktioner som konvergerar och inte tal.

Många av de satser som vi bevisar går att bevisa även för sekvenser av funktioner men vi ska inte diskutera dessa problem nu. Vi lämnar det till en senare kurs.

8: Bevisuppgift 2 (Osäkerhetsprincipen): Bevisa att om $f(x)$ är kontinuerligt deriverbar på $[-1, 1]$, $f(-1) = f(1) = 0$ och $\int_{-1}^1 f(x)^2 dx = 1$ så gäller följande olikhet:

$$\int_{-1}^1 x^2 f(x)^2 dx \int_{-1}^1 f'(x)^2 dx \geq \frac{1}{4}.$$

LEDTRÅD: Kan du använda partiell integration på $\int_{-1}^1 f(x)^2 dx = 1$ tillsammans med Hölders olikhet?

Bevis: Observera att

$$\begin{aligned} 1 &= \left| \int_{-1}^1 f^2(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{dx}{dx} f^2(x) dx \right| = \left\{ \begin{array}{c} \text{partiell} \\ \text{integration} \end{array} \right\} = \\ &= \left| f^2(1) + f^2(-1) - \int_{-1}^1 2x f(x) f'(x) dx \right| = \left\{ \begin{array}{c} \text{eftersom} \\ f(-1) = f(1) = 0 \end{array} \right\} = \left| -2 \int_{-1}^1 x f(x) f'(x) dx \right| \leq \\ &\leq \left\{ \begin{array}{c} \text{Hölders} \\ \text{olikhet} \end{array} \right\} \leq 2 \left(\int_{-1}^1 (f'(x))^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-1}^1 x^2 f^2(x) dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

satsen följer genom att ta kvadraten av båda sidor och dividera med 4.

Kommentar: I kvantfysiken så kan den här matematiska olikheten tolkas som att det är omöjligt att exakt avgöra både rörelsemängden och positionen av en partikel. Tyvärr så involverar förklaringen till detta allt för mycket teoretiskt material för att vi ska kunna gå in på varför här.

8: Tentamensfråga: [Del 1, Modul 2]

1. Ange en funktion $f(x)$ så att $f(1) = 1$ och $f'(1) = 0$.

[SVARA MED ETT EXEMPEL ELLER "OMÖJLIGT".] (1poäng)

2. Låt $f(x)$ vara en injektiv funktion definierad på $[0, 1]$. Ange värdemängden till f^{-1} .

[SVARA MED EN MÄNGD ELLER "OMÖJLIGT ATT AVGÖRA".] (1poäng)

3. Låt

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 1) & \text{om } x < 0 \\ \cos(\sin(x) + \tan(x)) & \text{om } x \geq 0 \end{cases}$$

vara en funktion definierad på $\mathbb{R}$. Beräkna $f'(x)$.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] (4poäng)

Svar:

1. Omöjligt. (Enl. definitionen så tilldelar en funktion endast ett unikt värde till varje punkt. Dvs $f(x)$ kan inte tilldela mer än ett värde till $x = 1$.)

2. $[0, 1]$

3. Om $x < 0$ så är $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ och om $x > 0$ så är $f'(x) = -\left(\cos(x) + \frac{1}{\cos^2(x)}\right) \sin(\cos(x) + \tan(x))$ då $x \neq \pi/2 + n\pi$ och odefinierad då $x = \pi/2 + n\pi$, där vi fritt har använt kedjeregeln och standardderivator.

Vi behöver därför bara beräkna derivatan i $x = 0$. För det så använder vi att om f är deriverbar i $x = 0$ så är f kontinuerlig i $x = 0$. Nu är

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(x^2 + 1) = 0$$

enligt sammansättningsregeln eftersom $\ln(x)$ är kontinuerlig i $x = 1$ och $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + x^2 = 1$. och

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos(\sin(x) + \tan(x)) = 1$$

enligt sammansättningsregeln och standardgränsvärden $\sin(x), \tan(x) \rightarrow 0$ och $\cos(x) \rightarrow 1$ när $x \rightarrow 0$.

Eftersom $1 \neq 0$ så följer det att f inte är kontinuerlig i $x = 0$ och därför inte deriverbar. Derivatan av $f(x)$ är således:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{1+x^2} & \text{om } x < 0 \\ \text{odefinierad} & \text{om } x = 0 \text{ eller } x = \pi/2 + n\pi, \quad n \geq 0 \\ -\left(\cos(x) + \frac{1}{\cos^2(x)}\right) \sin(\cos(x) + \tan(x)) & \text{om } x > 0 \text{ och } x \neq \pi/2 + n\pi. \end{cases}$$

9: Tentamensfråga: [Del 2] Följande påstående är felaktigt: "Om $f'(x) \leq 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$ så kommer $f(x) \leq f(0) + |x|$." Identifiera felet och bevisa att påståendet är felaktigt. Lägg till ett nytt, och rimligt, antagande som gör påståendet riktigt och bevisa det riktiga påståendet.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] (6poäng)

Resononomang: Medelvårdessatsen säger att om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på $]a, b[$ så finns det en punkt $\xi \in]a, b[$ så att $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$. Dvs, med $a = 0$ och $b = x$, $f(x) = f(0) + f'(\xi)x$. Om $x \geq 0$, dvs $x = |x|$, så kan vi härleda $f(x) = f(0) + f'(\xi)x \leq f(0) + |x|$ eftersom $f'(\xi)x \leq x = |x|$ om $x \geq 0$ och $f'(\xi) \leq 1$. Detta visar påståendet om $x \geq 0$. Men vi ser lätt att argumentet inte fungerar för $x < 0$ eftersom om $x < 0$ så är $-|x| = x$ och således

$$f(x) = f(0) + f'(\xi)x = f(0) - f'(\xi)|x| \geq \left\{ \begin{array}{l} \text{eftersom} \\ f'(\xi) \leq 1 \end{array} \right\} \geq f(0) - |x|$$

och olikheten blir felvänd. Vi ser att vi skulle behöva olikheten $f'(x) \geq -1$ för att genomföra argumentet med den olikhet vi vill ha. Vi gissar att det nya antagandet vi behöver är $f'(x) \geq -1$ (detta är bara en gissning tills vi kan strikt bevisa att påståendet är sant med det nya antagandet men i sken av ovanstående beräkningar så tycks det vara det antagandet som behövs).

Om det antagandet vi behöver för att göra påståendet sant är $f'(x) \geq -1$ så borde vi kunna använda den informationen för att konstruera ett motexempel till ursprungspåståendet.

Motexempel till påståendet: Låt $f(x) = -2x$ då är $f'(x) = -2 \leq 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$ så $f(x)$ uppfyller antagandet i påståendet i uppgift 2. Men, med $x = -1$ så får vi $f(x) = f(-1) = 2 > f(0) + |x| = 1$ så $f(x)$ uppfyller därför inte slutsatsen. Så $f(x) = -2x$ är ett motexempel till påståendet i uppgiften. Vi har därmed bevisat att påståendet är falskt.

Korregerat påstående: "Om $f'(x) \leq 1$ och $f'(x) \geq -1$ för alla $x \in \mathbb{R}$ så kommer $f(x) \leq f(0) + |x|$."

Bevis: Enligt medelvårdessatsen så kommer det att finnas ett tal ξ mellan 0 och x så att

$$f(x) = f(0) + f'(\xi)x \leq \begin{cases} f(0) + x = f(0) + |x| & \text{om } x \geq 0 \text{ eftersom } f'(\xi) \leq 1 \\ f(0) - x = f(0) + |x| & \text{om } x < 0 \text{ eftersom } f'(\xi) \geq -1. \end{cases}$$

Det följer att om $x \geq 0$ eller $x < 0$, dvs för alla $x \in \mathbb{R}$, att $f(x) \leq f(0) + |x|$. Detta bevisar påståendet.

Kommentarer: Ett fullgott svar på frågan skulle bestå i "Motexempel till påståendet", "Korregerat påstående" och "Bevis".

Jag tyckte att det var lite torftigt att bara skriva de delarna för det som är viktigt och det som jag vill att ni ska kunna (frågan är bara ett tafatt försök att testa den verkliga kunskapen) är att resonera kring matematiken. I det här fallet så valde jag, i princip, att försöka bevisa det felaktiga påståendet och observerade noga när beviset bröt samman. Dvs att vi inte kunde dra slutsatsen att $f(x) \leq f(0) + |x|$ för negativa x under de antaganden som gjordes i påståendet.

Då jag ville dra slutsatsen $f(x) = f(0) + f'(\xi)x \leq f(0) + |x|$ för negativa x så blev det ganska lätt att dra slutsatsen att $f'(x) \geq -1$ var ett rimligt nytt antagande. Det var definitivt tillräckligt för att kunna bevisa påståendet. Denna observation, som kom från ett försök att bevisa ett felaktigt påstående, gav också en stark antydning om att ett motexempel borde kunna konstrueras genom att betrakta en funktion $f(x)$ där $f'(x) < -1$ (dvs. bröt mot antagandet jag trodde var nödvändigt).

All bra matematik sker i kommunikation med den matematiska formalismen. Vi försöker bevisa något och är noga uppmärksamma på när matematiken säger "Stopp - den här härledningen är inte stringent." Men stoppet i resonemanget ger en ledtråd till de argument matematiken tillåter. Den värsta uppfattningen ni kan ta med er från den här kursen är att matematiken är ett dött läroämne där allt som är värt att veta står i matteböcker samlade på dammiga hyllor på olika bibliotek. Matematiken är en dynamisk och ständigt pågående process där vi interagerar med den matematiska formalismen och för varje sats i boken så finns det 100 andra lika viktiga satser som vi kan bevisa om vi varsamt beaktar de ledtrådar matematiken ger oss.

Det finns ett uppenbart problem med den här typen av tentamensfrågor. Nämligen att jag ber er lägga till ett "rimligt" antagande. Vad som är rimligt är naturligtvis en tolkningsfråga och det är inte helt tydligt vad som är "rimligt". I detta fall så tycker jag att det extra antagandet $f'(x) \geq -1$ är rimligt. Men att antaga att $f(x)$ är växande (dvs $f'(x) \geq 0$) är nog också rimligt. Påståendet skulle också bli sant om vi lade till antagandet att $f(x)$ = konstant eller $f(x) = \sin(x)$ jag tycker själv inte att dessa antaganden är lika rimliga. Om f är konstant så blir resultatet en trivialitet och om $f(x) = \sin(x)$ så skulle ursprungsantagandet $f'(x) \leq 1$ vara onödigt så att antaga att $f(x) = \sin(x)$ är allt för specifikt.

Men rimligheten i ett antagande är en tolkningsfråga som vi måste acceptera om vi vill ha en matematikexamination som tillåter oss att examinera hur vi skapar matematik.