Tränings Tentamen 1 SF1602 HT2013

Hjälpmedel: Papper, penna.
Totalt 6 poäng per uppgift. För godkänt på modulen krävs 4 poäng.
För E krävs 4 godkända moduler. För ett D krävs 5 godkända moduler. Med 5 godkända moduler ges rätten att skriva tentamen del 2 vilken ger möjlighet till C,B och A.

Tentamen DEL 1.

Fråga 1: [Del 1, Modul 1]

1. Var är $\lim_{x\to 0} \frac{x^3+\cos(x)}{4x^7+3}$? [Ingen motivering krävs.] **(1 poäng)**
2. Ange (den naturliga) värdemängden V_f och definitionsmängden D_f då $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2}\sin(x))$. [Ingen motivering krävs.] **(1 poäng)**
3. Ange samtliga lösningar till $\sin(|x-2|) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. [Motivera ditt svar.] **(4 poäng)**

Svar:

1. 1/3 (Använd kvot och summaregeln samt standardgränsvärdena $x^3 \to 0$, $x^7 \to 0$ och $\cos(x) \to 1$ då $x \to 0$.)
2. $D_f = \mathbb{R}$ och $V_f = [0, 1]$.
3. Vi vet att $\sin(y) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ när $y = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ eller $y = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$ för något $n \in \mathbb{Z}$. Så lösningarna ges av de x så att $|x-2| = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ eller $|x-2| = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$. Vi får två fall:

   Fall 1: *Om* $x \geq 2$. Då gäller det, enligt definitionen av absolut beloppet, att $|x-2| = x-2$ vilket ger lösningarna $x = 2 + \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ eller $x = 2 + \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$. Då vi har villkåret $x \geq 2$ ser vi att detta ger antingen

   $$x = 2 + \frac{\pi}{4} + 2\pi n \qquad \text{för något heltal } n \geq 0$$

   eller

   $$x = 2 + \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \qquad \text{för något heltal } n \geq 0.$$

   Fall 2: *Om* $x < 2$. Då är $|x-2| = -x+2$ så $\sin(|x-2|) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ om $x = 2 - \frac{\pi}{4} - 2\pi n$ eller $x = 2 - \frac{3\pi}{4} - 2\pi n$. Dvs om

   $$x = 2 - \frac{\pi}{4} - 2\pi n \qquad \text{för något heltal } n \geq 0$$

   eller

   $$x = 2 + \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \qquad \text{för något heltal } n \geq 0.$$

Fråga 2: [Del 1, Modul 2]

1. Ange en funktion $f(x)$ så att $f(1) = 1$ och $f(1) = 0$. [Svara med ett exempel eller "omöjligt".] **(1poäng)**
2. Låt $f(x)$ vara en injektiv funktion definierad på $[0, 1]$. Ange värdemängden till f^{-1}. [Svara med en mängd eller "omöjligt att avgöra".] **(1poäng)**
3. Låt

   $$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2+1) & \text{om } x < 0 \\ \cos(\sin(x) + \tan(x)) & \text{om } x \geq 0 \end{cases}$$

   vara en funktion definierad på $\mathbb{R}$. Beräkna $f'(x)$. [Fullständig motivering krävs.] **(4poäng)**

Svar:

1. Omöjligt. (Enl. definitionen så tilldelar en funktion endast ett unikt värde till varje punkt. Dvs $f(x)$ kan inte tilldela mer än ett värde till $x = 1$.)
2. $[0, 1]$

3. Om $x < 0$ så är $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ och om $x > 0$ så är $f'(x) = -\left(\cos(x) + \frac{1}{\cos^2(x)}\right)\sin(\cos(x) + \tan(x))$ då $x \neq \pi/2 + n\pi$ och odefinierad då $x = \pi/2 + n\pi$, där vi fritt har använt kedjeregeln och standardderivator.

   Vi behöver därför bara beräkna derivatan i $x = 0$. För det så använder vi att om f är deriverbar i $x = 0$ så är f kontinuerlig i $x = 0$. Nu är
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \ln(x^2 + 1) = 0$$
   enligt sammansättningsregeln eftersom $\ln(x)$ är kontinuerlig i $x = 1$ och $\lim_{x \to 0} 1 + x^2 = 1$. och
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \cos(\sin(x) + \tan(x)) = 1$$
   enligt sammansättningsregeln och standardgränsvärden $\sin(x), \tan(x) \to 0$ och $\cos(x) \to 1$ när $x \to 0$.

   Eftersom $1 \neq 0$ så följer det att f inte är kontinuerlig i $x = 0$ och därför inte deriverbar. Derivatan av $f(x)$ är således:
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{1+x^2} & \text{om } x < 0 \\ \text{odefinierad} & \text{om } x = 0 \text{ eller } x = \pi/2 + n\pi, \quad n \geq 0 \\ -\left(\cos(x) + \frac{1}{\cos^2(x)}\right)\sin(\cos(x) + \tan(x)) & \text{om } x > 0 \text{ och } x \neq \pi/2 + n\pi. \end{cases}$$

Fråga 3: [Del 1, Modul 3]

1. Låt $f(x)$ vara deriverbar på $\mathbb{R}$ och $F(x) = \int f(x)dx$. Ange ett villkår på $f(x)$ som garanterar att $F(x)$ är strikt konvex. [ANGE VILLKÅRET.] **(1poäng)**
2. Ange en funktion $f(x)$ som är växande men $\int f(x)dx$ avtagande? [SVARA MED ATT ANGE FUNKTIONEN.] **(1poäng)**
3. Bestäm alla primitiva funktioner till
$$\int \frac{5}{(x+3)^2}\sqrt{\frac{x+3}{x+2}}.$$
   [FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(4poäng)**

Svar:

1. $f'(x) > 0$ (Observera att $D^2F(x) = f'(x)$. Så $D^2F(x) > 0$, dvs F är konvex, om $f' > 0$.)
2. $f(x) = -e^{-x}$ (Vi måste hitta en strikt negativ men växande funktion. Då blir $F'(x) = f(x) < 0$ så F är strikt avtagande.)
3. Vi gör standardsubstitutionen $t = \sqrt{\frac{x+3}{x+2}}$, dvs $x = \frac{3-2t^2}{t^2-1}$, $x + 3 = \frac{t^2}{t^2-1}$ samt $dx = \frac{-2t}{(t^2-1)^2}$. Därför är
$$\int \frac{5}{(x+3)^2}\sqrt{\frac{x+3}{x+2}} = -10\int \frac{1}{t^2}dt = \frac{10}{t} + C$$
   för någon konstant C.

Fråga 4: [Del 1, Modul 4]

1. Antag att $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ och att $g'(x) < 0$ är $F(x) = \int_0^{g(x)} f(t)dt$ växande, avtangande, strikt växande eller strikt avtagande. [ANGE VILKET ELLER "GÅR INTE ATT AVGÖRA.".] **(1poäng)**
2. Hur definieras den generaliserade integralen $\int_0^\infty f(x)dx$? [ANGE DEFINITIONEN.] **(1poäng)**
3. Beräkna den generaliserade integralen $\int_3^\infty \frac{1}{(x+1)^2(x-1)}dx$. [FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS] **(4poäng)**

Svar:

1. Avtagande (Använd analysens huvudsats för att beräkna $F'(x) = g'(x)f(g(x)) \leq 0$.)
2. $\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{t \to \infty} \int_0^t f(x)dx$ om högerledet konvergerar.

3. Vi partialbråksuppdelar

$$\frac{1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1} = \frac{(b+c)x^2 + (a+2c)x + (c-b-a)}{(x+1)^2(x-1)}.$$

Om vi jämför termer av samma grad i nämnaren i höger och vänsterled så får vi $c+b=0$, $a+2c=0$ och $c-b-a=1$. Det följer att

$$\int_3^\infty \frac{1}{(x+1)^2(x-1)}dx = \lim_{t\to\infty}\int_3^t \frac{1}{(x+1)^2(x-1)}dx =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{4}\int_3^t \left(\frac{-2}{(x+1)}^2 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right)dx = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{4}\left[\frac{2}{(t+1)} - \ln(t+1) + \ln(t-1)\right] - \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3+1} + \ln(1/2)\right] =$$

$$= \frac{\ln(2)}{4} - \frac{1}{8} \qquad \text{(Vilket är vårt svar.)}$$

där vi använder

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{4}\left[\frac{2}{(t+1)} - \ln(t+1) + \ln(t-1)\right] = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{4}\left[\frac{2}{(t+1)} + \ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right] = 0$$

där vi använt sammansättningsregeln, standardgränsvärden såsom $\frac{2}{(t+1)} \to 0$, $\frac{t-1}{t+1} \to 1$ då $t \to \infty$ och $\ln(t) \to 0$ då $t \to 1$.

Fråga 5: [Del 1, Modul 5]

1. Låt $f(x)$ vara en lösning till följande differential ekvation $f'(x) = f(x)^3$, och $f(0) = a$. För vilka a är $f(x)$ garanterat strikt växande. [Ange alla värden a.] **(1poäng)**

2. Hur många lösningar har följande differentialekvation: $(y')^2 = \cos(x) - 3$.

   [Svara med ett tal eller "oändligt många".] **(1poäng)**

3. Lös följande differentialekvation:

   $$y' + (1+y^2)x^2 = 0.$$

   Med initialdata $y(0) = 1$. För vilka x är lösningen definierad?
   ständig motivering krävs.] **(4poäng)**

Svar:

1. $a > 0$

2. 0 ($(y')^2 \geq 0$ men högerledet $\cos(x) - 3 \leq -2$.)

3. Differentialekvationen är separabel och kan skrivas $\frac{y'}{1+y^2} = -x^2$. Detta kan skrivas som

   $$\frac{d\arctan(y)}{dx} = -x^2.$$

   Detta är samma sak som $\arctan(y) = -\frac{x^3}{3} + C$ för någon konstant C. Så $y = \tan\left(-\frac{x^3}{3} + C\right)$. Initialdata implicerar att $y(0) = \tan(C) = 1$, dvs $C = \frac{\pi}{4}$.

   Delsvar: $y(x) = \tan\left(-\frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$.

   Eftersom $D_{tan} = (-\pi/2, \pi/2)$ så är lösningen definierad för $-\pi/2 < -\frac{x^3}{3} + \frac{\pi}{4} < \pi/2$ vilket implicerar att $-\left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/3} < x < \left(\frac{3\pi}{4}\right)^{1/3}$.

Fråga 6: [Del 1, Modul 6]

1. Antag att $f(x)$ har Maclaurinserien $1 + 2x - 3x^2 + R_3(x)$. Vad är andraderivatan av $g(x) = xf(x)$ i punkten $x = 0$.

   [Svara med ett tal.] **(1poäng)**

2. Om $f(x)$ har Maclaurinserien $1 - \frac{1}{3}x^2 + 4x^3 + R_4(x)$, vad är Maclaurinserien av $f(x^2)$ med ordning 4.

   [Svara med en 4e ordningens Maclaurinserie.] **(1poäng)**

3. Visa att $|\tan(x) - x| \leq \frac{8}{3}|x|^3$ för alla x så att $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. [Motivera ditt svar.] **(4poäng)**

Svar:

1. 4
2. $f(x^2) = 1 - \frac{1}{3}x^4 + R_5(x)$.
3. Vi gör en Maclaurinutveckling av $f(x) = \tan(x)$. Vi beräknar $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$, $f''(x) = 2\frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}$ samt $f'''(x) = 2\frac{\cos^2(x)+3\sin^2(x)}{\cos^4(x)}$. Det följer att $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ och $f''(0) = 0$ samt, för $|x| \le \frac{\pi}{4}$

$$|f'''(x)| = 2\left|\frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{3\sin^2(x)}{\cos^4(x)}\right| \le 2\left|\frac{1}{\cos^2(x)}\right| + 2\left|\frac{3\sin^2(x)}{\cos^4(x)}\right| \le 16,$$

där vi har använt att $\cos(x) \ge \sqrt{1}\sqrt{2}$ och $|\sin(x)| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ då $|x| \le \frac{\pi}{4}$.

Maclaurinutvecklingen blir således

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3!}f'''(\theta x)x^3$$

för något $|\theta| \le 1$. Detta innebär att

$$|\tan(x) - x| \le \frac{1}{6}|x|^3 \max_{|t|\le\pi/4}|f'''(t)| \le \frac{8}{3}|x|^3$$

där vi använde att $|f'''(t)| \le 16$ i den sista olikheten.

Tentamen DEL 2.

Varje fråga tilldelas 6 poäng. Totalt 36 poäng. För C krävs 12 poäng, för B krävs 20 poäng och för ett A krävs 28 poäng.

Fråga 1: [Del 2]

1. Ange värdet av

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}.$$

[Ingen motivering krävs.] **(1 poäng)**

2. Bevisa ditt svar utifrån $\epsilon-$definitionen. **(5poäng)**

Ledtråd: *Du kan använda att* $\lim_{x\to 0}|\frac{\sin(x)}{x} = 1$ *och* $1 \ge \cos(x) \ge 1 - \frac{1}{2}x^2$ *utan bevis.*

Svar:

1. $-\sin(x)$ (Uttrycket är bara definitionen av derivatan av $\cos(x)$.)
2. Vi använder additionsregeln för vinkeln:

$$\cos(x+h) = \cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h)$$

i uttrycket och får således:

$$\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \frac{\cos(x)(\cos(h)-1) - \sin(x)\sin(h)}{h} = \cos(x)\frac{(\cos(h)-1)}{h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h}. \quad (1)$$

Eftersom, enl. ledtråden, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ så finns det för varje $\epsilon > 0$ ett δ_ϵ så att

$$|h| < \delta_\epsilon \Rightarrow \left|\frac{\sin(h)}{h} - 1\right| < \epsilon. \quad (2)$$

Dessutom så gäller det, enl ledtråden, att om $|h| < \epsilon/2$ så

$$\left|\frac{\cos(h)-1}{h}\right| < \left|\frac{h^2}{2h}\right| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3)$$

Vi vill visa att det för varje $\epsilon > 0$ existerar ett $\tilde{\delta}_\epsilon$ så att

$$|h| < \tilde{\delta}_\epsilon \Rightarrow \left|\frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} + \sin(x)\right| < \epsilon. \quad (4)$$

Så om $|h| < \min(\delta_{\epsilon/2}, \epsilon) = \tilde{\delta}$ så kommer

$$\left|\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} + \sin(x)\right| = \left\{ \begin{array}{l} \text{använd} \\ (1) \end{array} \right\} =$$

$$= \left|\cos(x)\frac{(\cos(h)-1)}{h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h} + \sin(x)\right| \leq$$

$$\leq \left\{ \begin{array}{l} \text{triangel} \\ \text{olikheten} \end{array} \right\} \leq |\cos(x)| \left|\frac{(\cos(h)-1)}{h}\right| + |\sin(x)| \left|\frac{\sin(h)}{h} - 1\right| <$$

$$< \left\{ \begin{array}{l} \text{använd (3)} \\ \text{och (2)} \end{array} \right\} < |\cos(x)| \frac{\epsilon}{2} + |\sin(x)| \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon$$

eftersom $|\sin(x)| \leq 1$ och $|\cos(x)| \leq 1$. Vi har således visat att det, för varje $\epsilon > 0$ finns ett $\tilde{\delta}_\epsilon > 0$ så att (4) håller. Beviset är därmed klart.

Fråga 2: [Del 2] Följande påstående är felaktigt: "Om $f'(x) \leq 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$ så kommer $f(x) \leq f(0) + |x|$." Identifiera felet och bevisa att påståendet är felaktigt. Lägg till ett nytt, och rimligt, antagande som gör påståendet riktigt och bevisa det riktiga påståendet.

[Fullständig motivering krävs.] **(6poäng)**

Resononomang: Medelvärdessatsen säger att om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$ och deriverbar på $]a, b[$ så finns det en punkt $\xi \in]a, b[$ så att $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$. Dvs, med $a = 0$ och $b = x$, $f(x) = f(0) + f'(\xi)x$. Om $x \geq 0$, dvs $x = |x|$, så kan vi härleda $f(x) = f(0) + f'(\xi)x \leq f(0) + |x|$ eftersom $f'(\xi)x \leq x = |x|$ om $x \geq 0$ och $f'(\xi) \leq 1$. Detta visar påståendet om $x \geq 0$. Men vi ser lätt att argumentet inte fungerar för $x < 0$ eftersom om $x < 0$ så är $-|x| = x$ och således

$$f(x) = f(0) + f'(\xi)x = f(0) - f'(\xi)|x| \geq \left\{ \begin{array}{l} \text{eftersom} \\ f'(\xi) \leq 1 \end{array} \right\} \geq f(0) - |x|$$

och olikheten blir felvänd. Vi ser att vi skulle behöva olikheten $f'(x) \geq -1$ för att genomföra argumentet med den olikhet vi vill ha. Vi gissar att det nya antagandet vi behöver är $f'(x) \geq -1$ (detta är bara en gissning tills vi kan strikt bevisa att påståendet är sant med det nya antagandet men i sken av ovanstående beräkningar så tycks det vara det antagandet som behövs).

Om det antagandet vi behöver för att göra påståendet sant är $f'(x) \geq -1$ så borde vi kunna använda den informationen för att konstruera ett motexempel till ursprungspåståendet.

Motexempel till påståendet: Låt $f(x) = -2x$ då är $f'(x) = -2 \leq 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$ så $f(x)$ uppfyller antagandet i påståendet i uppgift 2. Men, med $x = -1$ så får vi $f(x) = f(-1) = 2 > f(0) + |x| = 1$ så $f(x)$ uppfyller därför inte slutsatsen. Så $f(x) = -2x$ är ett motexempel till påståendet i uppgiften. Vi har därmed bevisat att påståendet är falskt.

Korregerat påstående:"Om $f'(x) \leq 1$ *och* $f'(x) \geq -1$ för alla $x \in \mathbb{R}$ så kommer $f(x) \leq f(0) + |x|$."
Bevis: Enligt medelvärdessatsen så kommer det att finnas ett tal ξ mellan 0 och x så att

$$f(x) = f(0) + f'(\xi)x \leq \left\{ \begin{array}{ll} f(0) + x = f(0) + |x| & \text{om } x \geq 0 \text{ eftersom } f'(\xi) \leq 1 \\ f(0) - x = f(0) + |x| & \text{om } x < 0 \text{ eftersom } f'(\xi) \geq -1. \end{array} \right.$$

Det följer att om $x \geq 0$ eller $x < 0$, dvs för alla $x \in \mathbb{R}$, att $f(x) \leq f(0) + |x|$. Detta bevisar påståendet.

Kommentarer: Ett fullgott svar på frågan skulle bestå i "Motexempel till påståendet", "Korregerat påstående" och "Bevis".

Jag tyckte att det var lite torftigt att bara skriva de delarna för det som är viktigt och det som jag vill att ni ska kunna (frågan är bara ett tafatt försök att testa den verkliga kunskapen) är att resonera kring matematiken. I det här fallet så valde jag, i princip, att försöka bevisa det felaktiga påståendet och observerade noga när beviset bröt samman. Dvs att vi inte kunde dra slutsatsen att $f(x) \leq f(0) + |x|$ för negativa x under de antaganden som gjordes i påståendet.

Då jag ville dra slutsatsen $f(x) = f(0) + f'(\xi)x \leq f(0) + |x|$ för negativa x så blev det ganska lätt att dra slutsatsen att $f'(x) \geq -1$ var ett rimligt nytt antagande. Det var definitivt tillräckligt för att kunna bevisa påståendet. Denna observation, som kom från ett försök att bevisa ett felaktigt påstående, gav också en stark antydan om att ett motexempel borde kunna konstrueras genom att betrakta en funktion $f(x)$ där $f'(x) < -1$ (dvs. bröt mot antagandet jag trodde var nödvändigt).

All bra matematik sker i kommunikation med den matematiska formalismen. Vi försöker bevisa något och är noga uppmärksamma på när matematiken säger "Stopp - den här härledningen är inte stringent." Men stoppet i resonemanget ger en ledtråd till de argument matematiken tillåter. Den värsta uppfattningen ni kan ta med er från den här kursen är att matematiken är ett dött läroämne där allt som är värt att veta står i matteböcker samlade på dammiga hyllor på olika bibliotek. Matematiken är en dynamisk och ständigt pågående process där vi interagerar med den matematiska formalismen och för varje sats i boken så finns det 100 andra lika viktiga satser som vi kan bevisa om vi varsamt beaktar de ledtrådar matematiken ger oss.

Det finns ett uppenbart problem med den här typen av tentamensfrågor. Nämligen att jag ber er lägga till ett "rimligt" antagande. Vad som är rimligt är naturligtvis en tolkningsfråga och det är inte helt tydligt vad som är "rimligt". I detta fall så tycker jag att det extra antagandet $f'(x) \geq -1$ är rimligt. Men att antaga att $f(x)$ är växande (dvs $f'(x) \geq 0$) är nog också rimligt. Påståendet skulle också bli sant om vi lade till antagandet att $f(x) =$konstant eller $f(x) = \sin(x)$ jag tycker själv inte att dessa antaganden är lika rimliga. Om f är konstant så blir resultatet en trivialitet och om $f(x) = \sin(x)$ så skulle ursprungsantagandet $f'(x) \leq 1$ vara onödigt så att antaga att $f(x) = \sin(x)$ är allt för specifikt.

Men rimligheten i ett antagande är en tolkningsfråga som vi måste acceptera om vi vill ha en matematikexamination som tillåter oss att examinera hur vi skapar matematik.

Fråga 3: [Del 2] Hitta alla primitiva funktioner till $\frac{a}{b+c\sin(x)}$ och $b^2 > c^2$. Markera tydligt var du använder $b^2 > c^2$.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(6poäng)**

Svar: Observera att

$$\frac{a}{b + c\sin(x)} = \frac{a}{b}\frac{1}{1 + \frac{c}{b}\sin(x)} = \frac{a}{b}\frac{1}{1 + \lambda\sin(x)}$$

där vi betecknar $\lambda = \frac{c}{b}$ vilken är väldefinierad då $|b| > 0$ eftersom $b^2 > c^2 \geq 0$. Om vi kan beräkna $\int \frac{1}{1+\lambda\sin(x)}dx$ så kan vi därför lätt lösa uppgiften. Eftersom integranden innehåller $\sin(x)$ så gör vi standardsubstitutionen $t = \tan(x/2)$, dvs $2\arctan(t) = x$, $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ och $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$. Därför så gäller det att

$$\int \frac{1}{1 + \lambda\sin(x)}dx = \int \frac{2}{1 + 2\lambda t + t^2}dt = \int \frac{2}{(t+\lambda)^2 + (1-\lambda^2)}dt =$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{substituera} \\ s = \frac{t+\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \end{array} \right\} = \frac{2}{(1-\lambda^2)^{3/2}} \int \frac{1}{1+s^2}ds = \frac{2}{(1-\lambda^2)^{3/2}}\arctan(s) + C,$$

där vi använde att $b^2 > c^2$, dvs $|\lambda| < 1$, i definitionen av s.

Genom att sätta in definitionen av t får vi

$$\int \frac{a}{b + c\sin(x)}dx = \frac{2a}{b\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)^{3/2}}\arctan\left(\frac{\tan(x/2) + \frac{c}{b}}{\sqrt{1 + \frac{c^2}{b^2}}}\right) + C.$$

Fråga 4: [Del 2] Låt $f(x)$ vara monoton, kontinuerlig på $[-1, 1]$ och $f(-1) = -2$, $f(1) = 1$.

1. Skissa ett tydligt bevis för att det finns en lösning till $f(x) = 0$ i $[-1, 1]$. **(3poäng)**
2. Skissa ett tydligt bevis att mängden av lösningar till $f(x) = 0$ är antingen en punkt eller ett slutet intervall $I \subset [-1, 1]$. **(3poäng)**

Svar: Eftersom f är monoton och $f(-1) < f(1)$ så måste f vara växande. Vi kommer att konstruera en sekvens av intervall $I_k = [a_k, b_k]$ så att $I_k \subset I_{k-1}$, och $b_k - a_k = 2^{1-k}$ och $f(a_k) \leq 0$ och $f(b_k) \geq 0$.

Konstruktionen sker på följande sätt. Låt $I_0 = [-1, 1]$ och antag att $I_{k-1} = [a_{k-1}, b_{k-1}]$ är givet enligt ovanstående kriterier. Om $f\left(\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}\right) \geq 0$ så sätter vi $I_k = [a_k, b_k] = [a_{k-1}, \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}]$ och om $f\left(\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}\right) < 0$ så sätter vi $I_k = [a_k, b_k] = [\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}, b_{k-1}]$. Det är tydligt att I_k då uppfyller alla kriterier i föregående stycke.

Eftersom a_k är en växande och begränsad sekvens så konvergerar $a_k \to a$ enligt komplettthetsaxiomet och eftersom $f(x)$ är kontinuerlig och $f(a_k) \leq 0$ så kommer $\lim_{k\to\infty} f(a_k) = f(a) \leq 0$ där den sista olikheten följer av olikhet i övergång av gränsvärde satsen.

Eftersom $a_k < b_k \leq a_k + 2^{1-k} \to a$ så kommer, enligt instängningsregeln, även $b_k \to a$. Så $\lim_{k\to\infty} f(b_k) = f(a)$ eftersom f är kontinuerlig och olikhet i övergång i gränsvärden tillsammans med $f(b_k) \geq 0$ implicerar att $f(a) \geq 0$.

Eftersom $0 \leq f(a) \leq 0$ så är $f(a) = 0$ och del 1 är bevisad.

För del 2 av frågan så betraktar vi mängden $N = \{a \in [-1, 1]; f(x) = 0\}$ detta är en begränsad och icke tom mängd så den har ett största element, x_s, och ett minsta element x_m. På grund av kontinuitet så är $f(x_s) = 0$ och $f(x_m) = 0$. Om $x_m = x_s$ så består N av en punkt. Om $x_m < x_s$ så kommer, för varje $x \in [x_m, x_s]$, $0 = f(x_s) \leq f(x) \leq f(x_s) = 0$ eftersom f är växande. Det följer att $f(x) = 0$ för alla $x \in [x_m, x_s]$ och lösningsmängden är ett intervall.

Fråga 5: [Del 2] En kanon skjuter en kula, som vid tidpunkten $t > 0$ har positionen $(x(t), y(t))$, med vinkeln $\pi/4$ radianer mätt av i relation till markplanet, som ges av $y = 0$, kulans hastighet vid tiden $t = 0$ är $\sqrt{2}$. Kulans hastighet i $y-$riktningen bestäms för $t > 0$ av Newtons ekvation $y''(t) = -1$, $y(0) = 0$ och kulans hastighet antas vara konstant i $x-$riktningen. Beräkna hur långt kulan färdas från att den avfyras i $t = 0$ tills den träffar markplanet $y = 0$.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(6poäng)**

Svar: Vi beräknar $y(t)$. Eftersom $y''(t) = -1$ så måste $y(t) = a + bt - \frac{1}{2}t^2$. Initialdata ger att $y(0) = 0$, dvs $a = 0$. Initialhastigheten är $\sqrt{2}$ i vinkeln $\pi/4$ vilket gör att hastigheten i $y-$led är $\sqrt{2}\cos(\pi/4) = 1$, dvs $y'(0) = 1$ eller $b = 1$. Vi får alltså $y(t) = t - \frac{1}{2}t^2$.

Det är enkelt att beräkna att $y(t) = 0$ då $t = 0$ och då $t = 2$. Vi letar alltså efter längden av kurvan $(x(t), y(t)) = (t, t - \frac{1}{2}t^2)$ då t går från 0 till 2. Kurvlängden ges av integralen

$$\int_0^2 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt = \int_0^2 \sqrt{1 + (1-t)^2}dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{substituera} \\ s = 1 - t \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + s^2}ds = \left\{ \begin{array}{l} \text{substituera} \\ \sigma = s + \sqrt{s^2+1} \end{array} \right\} =$$

$$= \int_{\sqrt{2}-1}^3 \left(\frac{\sigma}{4} + \frac{1}{2\sigma} + \frac{1}{4\sigma^3}\right) d\sigma = \frac{9}{8} + \frac{1}{2}\ln|3| - \frac{1}{36} - \frac{3-2\sqrt{2}}{8} - \frac{1}{2}\ln|\sqrt{2}-1| + \frac{1}{8(3-2\sqrt{2})} = \frac{11-6\sqrt{2}}{8(3-2\sqrt{2})} - \frac{1}{36} + \ln\left|\frac{3}{\sqrt{2}-1}\right|^{1/2}.$$

Fråga 6: [Del 2] Låt $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2(t)}}dt$. Beräkna $F(1/10)$ med två värdesiffror. Du kan använda att $|\sin(x)| \leq |x|$ utan bevis. [FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(6poäng)**

VARNING: *Du kan inte hitta en primitiv funktion till den här integranden.*

Svar: Eftersom vi inte kan integrera funktionen så beräknar vi dess Taylorserie i $x = 0$. Standard beräkningar ger:

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin^2(x)}} \qquad F''(x) = \frac{1}{2}\frac{\sin(x)\cos(x)}{\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2(x)\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad F'''(x) = \frac{\cos(2x)\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2(x)\right) + 12\sin^2(x)\cos^2(x)}{2\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2(x)\right)^{\frac{5}{2}}}.$$

Vilket ger

$$F(0) = 0, \qquad F'(0) = 1 \quad \text{och} \quad F''(0) = 0.$$

Vi kan alltså skriva Taylorserien som

$$F(x) = x + \frac{1}{6}F'''(\theta_x x)x^3 \tag{5}$$

där θ_x är ett tal vilket beror av x men $|\theta_x| \leq 1$. Vi måste skatta $F'''(x)$ för att kunna utföra vår approximation. Då $|x| \leq \frac{1}{10}$ så är $\sin^2(x) \leq \frac{1}{100}$ så vi kan skatta, för $|x| \leq \frac{1}{10}$

$$|F'''(x)| \leq \left|\frac{\cos(2x)}{2\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2(x)\right)^{\frac{3}{2}}}\right| + \left|\frac{12\sin^2(x)\cos^2(x)}{2\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2(x)\right)^{\frac{5}{2}}}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{400}{399}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{50}\left(\frac{400}{399}\right)^{\frac{5}{2}} \leq 2$$

där vi använde att $|\cos(x)| \leq 1$, att $|1 - \sin^2(x)/4| \geq \frac{399}{400}$ och $\sin^2(x) \leq \frac{1}{100}$. I sista olikheten använde vi även en grov uppskattning av $\frac{399}{400}$.

Om vi använder uppskattningen av $|F'''|$ i (5) så kan vi härleda, för $|x| \leq \frac{1}{10}$,

$$|F(x) - x| \leq \frac{1}{6}|F'''(\theta_x x)|x^3 \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^3 \leq 0.001.$$

Detta ger, med två värdesiffror,

$$F(1/10) = 0.10.$$