Tentamen SF1602 10 Mars 2014

Hjälpmedel: Papper, penna.
Totalt 6 poäng per uppgift. För godkänt på modulen krävs 4 poäng.
För E krävs 4 godkända moduler. För ett D krävs 5 godkända moduler. Med 5 godkända moduler ges rätten att skriva tentamen del 2 vilken ger möjlighet till C,B och A. Modulresultat från tidigare kursomgångar gäller ej.
Om plussning: Om du redan är godkänd på kursen med ett D eller bättre så behöver du inte skriva del 1. Om du inte är godkänd på kursen eller har ett E på kursen så måste du skriva del 1. Du behåller dock de moduler som du klarade genom KSar eller inlämningsuppgifter under kursomgången HT2013. Moduler som klarats vid tidigare kursomgångar eller på tentamen räknas inte.

Tentamen DEL 1.

Fråga 1: [Del 1, Modul 1]

1. Hur många av följande gränsvärden är 0?
   a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$, **b)** $\lim_{n\to\infty}\frac{12^n}{n!}$, **c)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-2)^2(x+3)}{4x^5+2x^2+8}$,
   d) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x}$, **e)** $\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^2+1}{(x+a^2)(x-1)(x-a)}$.

   [Svara med ett tal 0,1,2,...,5. Ingen motivering krävs.] **(1 poäng)**

2. Ange ett exempel på en kontinuerlig definition $f(x)$ definierad på hela $\mathbb{R}$ så att det för varje $\epsilon > 0$ existerar ett $C_\epsilon > 0$ så att
   $$x > C_\epsilon \Rightarrow f(x) < \epsilon$$
   men $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$.

   [Ingen motivering krävs.] **(1 poäng)**

3. Hitta alla lösningar till följande ekvation: $|1+\cos(x^2)| = \sqrt{3}\sin(x^2)$.

   [Fullständig motivering krävs.] **(4 poäng)**

Svar:

1. 3 (**b**, **c**, och **d**, konvergerar till 0, **a** konvergerar till e och **e** är odefinierad om $a \neq 1$ och går till oändligheten om $a = 1$.)
2. Tex $f(x) = -1$.
3. För att förenkla notationen så kallar vi $x^2 = y \geq 0$. Ekvationen är då uppfylld om
   $$1+\cos(y) = \pm\sqrt{3}\sin(y).$$
   Det vill säga om
   $$1 = -\cos(y) \pm \sqrt{3}\sin(y) = 2\left(-\frac{1}{2}\cos(y) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(y)\right) = 2\cos(y+\phi) \tag{1}$$
   där ϕ väljes så att $\cos(\phi) = -\frac{1}{2}$ och $\sin(\phi) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ dvs $\tan(\phi) = \pm\sqrt{3}$ så $\phi = \pm\frac{\pi}{3}$. Använder vi detta ϕ i (1) så får vi följande ekvation
   $$\frac{1}{2} = \cos\left(y \pm \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow y \pm \frac{\pi}{3} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n$$
   där $n \in \mathbb{Z}$ så att $y \geq 0$. Vi får således
   $$y = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2\pi n & n \geq 0 \\ \frac{\pi}{6} + 2\pi n & n \geq 0 \\ -\frac{\pi}{6} + 2\pi n & n \geq 1 \\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n & n \geq 1. \end{cases}$$
   Vi får därför $x = \pm\sqrt{y}$ där y är specificerad i föregående ekvation.

Fråga 2: [Del 1, Modul 2]

1. Ange hur $\frac{df}{dx}$ definieras.

[Ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

2. Låt $f(x)$ vara en deriverbar funktion på $\mathbb{R}$. Antag vidare att $f(0) = 1$ och att $f'(x) \geq 1$ för alla x. Ange det område där $f(x) \geq x$ med säkerhet.

[Ange ett område i $\mathbb{R}$ eller "omöjligt att avgöra". Ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

3. Låt K vara en kropp med massa m som rör sig med hastigheten $v(t)$. Enligt energikonserverings principen så kommer den totala den totala energin, dvs summan av den potentiella energin $P(t)$ och rörelseenergin $\frac{m}{2}v(t)^2$, att vara konstant lika med E (med andra ord $P(t) + \frac{m}{2}v(t)^2 = E$). Antag att den potentiella energin $P(t)$ har tangenten $3(t - t_0) + 2$ i tidpunkten t_0. Vad är kroppens hastighet och acceleration i tidpunkten t_0 som en funktion av E och m? Du får antaga att $P(t)$ och $V(t)$ är deriverbara.

[Fullständig motivering krävs.] **(4poäng)**

Svar:

1. Låt $f(x)$ vara definierad i en omgivning av punkten x, då definierar vi derivatan av f i punkten x enligt

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

om gränsvärdet existerar. Annars säger vi att derivatan är odefinierad i x.

2. $[0, \infty[$.

3. Tangentens till $P(t)$ i punkten t_0 ges av $P'(t_0)(t - t_0) + P(t_0)$. Om vi jämför det uttrycket med den givna tangenten så ser vi att $P(t_0) = 2$ och $P'(t_0) = 3$. Eftersom $P(t) + \frac{m}{2}v(t)^2 = E$ så får vi $v(t_0) = \sqrt{2}m\,(E-2)^{1/2}$ där vi använde att $P(t_0) = 2$. **Delsvar:** Kroppens hastighet vid tiden t_0 är $v(t_0) = \sqrt{2}m\,(E-2)^{1/2}$.

För att beräkna accelerationen av K i t_0, det vill säga $v'(t_0)$, så deriverar vi $P(t) + \frac{m}{2}v(t)^2 = E$ med avseende på t

$$0 = \frac{dE}{dt} = \frac{dP(t_0)}{dt} + \frac{m}{2}\frac{dv(t_0)^2}{dt} = \left\{ \begin{array}{l} \text{produkt regeln} \\ \text{och } P'(t_0) = 3 \end{array} \right\} = 3 + mv(t_0)\frac{dv(t_0)}{dt},$$

här använde vi också antagandet att v är deriverbar och E en konstant. Eftersom $v(t_0) = \sqrt{2}m\,(E-2)^{1/2}$ så leder detta till

$$v'(t_0) = -\frac{3}{\sqrt{m}\,(E-2)^{1/2}}$$

vilket är vårt andra svar.

Fråga 3: [Del 1, Modul 3]

1. Ange en funktion $f(x)$ så att $f(x) < 0$ för alla $x \in [-2, 2]$ och $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ är växande för $x \in [0, 2]$.

[Ange $f(x)$ eller "omöjligt", ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

2. Låt $f(x)$ vara en integrerbar funktion på $[-1, 1]$ med partialbråksuppdelning $p(x) = \frac{3x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{(x-2)}$. Vad är $\int_{-1}^{1} (f(x) - p(x))\,dx$?

[Ange integralens värde, "omöjligt att avgöra" eller odefinierad, ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

3. Bestäm alla primitiva funktioner definierade för $0 < x < \pi$ till $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x) + \sin^3(x)}$. Ange noga alla satser du använder.

[Fullständig motivering krävs.] **(4poäng)**

Svar:

1. Omöjligt.

2. 0

3. Vi beräknar

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)+\sin^3(x)}dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{variabel subst. } t=\sin(x) \\ \Rightarrow \cos(x)dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t^2(1+t)}.$$

För att lösa den sista integralen så partialbråksuppdelar vi $\frac{1}{t^2(1+t)}$. Vi gör ansatsen

$$\frac{1}{t^2(1+t)} = \frac{a}{t}+\frac{b}{t^2}+\frac{c}{1+t} = \frac{at+at^2+b+bt+ct^2}{t^2(1+t)}.$$

Om vi identifierar termer i täljaren så leder det till följande ekvationssystem

$$\left. \begin{array}{r} b=1 \\ a+b=0 \\ a+c=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=-1 \\ b=1 \\ c=1. \end{array} \right.$$

Därför så

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)+\sin^3(x)}dx = -\int \frac{1}{t}dt + \int \frac{1}{t^2}dt + \int \frac{1}{1+t}dt =$$

$$= -\ln|t| - \frac{1}{t} + \ln|1+t| + C = -\ln|\sin(x)| - \frac{1}{\sin(x)} + \ln|1+\sin(x)| + C,$$

för en godtycklig konstant C.

Fråga 4: [Del 1, Modul 4]

1. Vad är värdet av $\int_{-1}^{1}\sum_{k=1}^{10} a_k x^{2k+1}dx$ där a_k är den k :te decimalen i π.

[Ange integralens värde eller "omöjligt att avgöra", ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

2. Låt $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{om } x=\frac{1}{2} \\ -1 & \text{om } x\neq\frac{1}{2}. \end{array} \right.$ Beräkna integralen $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

[Ange integralens värde eller "odefinierad", ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

3. Förklara noga varför varför följande beräkning är felaktig och analysera sedan integralen på ett matematiskt korrekt sätt,

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=-1}^{1} = -\frac{1}{1}+\frac{1}{-1} = -2.$$

Var noga med att beskriva de matematiska begrepp och satser du använder.

[Fullständig motivering krävs] **(4poäng)**

Svar:

1. 0 (Observera att funktionen är udda och integreras över ett jämt intervall. - Jag hoppas att ingen av er satt och beräknade 10 integraler för en enstaka poäng!)

2. 2 (Värdet i en punkt påverkar inte integralens värde.)

3. Vi borde bli lite misstänksamma mot beräkningen eftersom integranden är strikt större än noll men beräkningen ger ett negativt svar.

   Vid en närmre inspektion så ser vi att integralen är generaliserad. Mer specifikt så kommer $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty$. Beräkningen som anges i uppgiften gäller inte då insättningsregeln inte gäller för generaliserade integraler.

   Vi måste behandla integralen enligt reglerna för generaliserade integraler. Enligt definitionen för beräkning av generaliserade integraler så kommer

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\epsilon}^{1}\frac{1}{x^2}dx + \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{1}{x^2}dx =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{\epsilon}-1\right) + \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{\epsilon}-1\right) = \infty.$$

   Vi har därmed bevisat att den generaliserade integralen divergerar.

Fråga 5: [Del 1, Modul 5]

1. Ange en andra ordningens differentialekvation som inte har några lösningar.

[Ange diff ekvationen eller "omöjligt". Ingen motivering krävs] **(1poäng)**

2. Ange en första ordningens linjär differentialekvation som bara har strikt växande lösningar.

[Ange diff ekvationen eller "omöjligt". Ingen motivering krävs] **(1poäng)**

3. Hitta lösningen $y(x)$ till följande differentialekvation

$$(1+x^2)y'(x) + xy(x) = 3x$$

och $y(0) = 1$.

[Fullständig motivering krävs.] **(4poäng)**

Svar:

1. $(y''(x))^2 = -1$
2. $y'(x) = 1$
3. Vi skriver om differentialekvationen som

$$y'(x) + \frac{x}{1+x^2}y(x) = \frac{3x}{1+x^2}$$

vilket är väldefinierat eftersom $1 + x^2 > 0$ för alla x. Detta kan skrivas som

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\ln(1+x^2)^{1/2}}y(x)\right) = e^{\ln(1+x^2)^{1/2}}\frac{3x}{1+x^2}$$

vilket är samma sak som

$$\frac{d}{dx}\left((1+x^2)^{1/2}y(x)\right) = \frac{3x}{(1+x^2)^{1/2}}.$$

Om vi integrerar det sista uttrycket så får vi

$$(1+x^2)^{1/2}y(x) = \int \frac{3x}{(1+x^2)^{1/2}}dx = 3(1+x^2)^{1/2} + C \Rightarrow y(x) = 3 + \frac{C}{(1+x^2)^{1/2}}$$

för någon konstant C. Vi bestämmer C genom att $1 = y(0) = 3 + \frac{C}{(1+0^2)^{1/2}} = 3 + C$, dvs $C = -2$. Vi får därför

$$y(x) = 3 - \frac{2}{(1+x^2)^{1/2}}$$

vilket är vårt svar.

Fråga 6: [Del 1, Modul 6]

1. Låt $f(x)$ och $g(x)$ vara två oändligt deriverbara funktioner så att $f(3) = g(3)$, $f'(3) = g'(3)$, $f''(3) = g''(3)$, $f^{(3)}(3) = g^{(3)}(3)$, $f^{(4)}(3) = g^{(4)}(3)$ och $f^{(5)}(3) = g^{(5)}(3)$. Ange tredje ordningens Taylorpolynom till funktionen $h(x) = f(x) - g(x)$ i punkten $x_0 = 3$.

[Ange Taylorpolynomet eller "omöjligt", ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

2. Ange två funktioner $f(x)$ och $g(x)$ definierade i en omgivning av $x_0 = 2$ så att l'Hospitals regel inte är tillämpbar för att beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}$.

[Ange $f(x)$ och $g(x)$ eller "omöjligt", ingen motivering krävs.] **(1poäng)**

3. Beräkna andra ordningens Taylorutveckling i punkten $x_0 = 2$ till

$$f(x) = \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Ange ditt svar med restterm på valfri form.

[Motivera ditt svar.] **(4poäng)**

Svar:

1. Tayorpolynomet till $h(x)$ i punkten $x_0 = 3$ är identiskt lika med noll.
2. Tag tex $f(x) = 2 + x$ och $g(x) = 4 + x$ då uppfyller f och g inte villkåret att $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ så l'Hospitals regel är inte tillämpbar.
3. Definitionen av Taylorutveklingen i $x_0 = 2$ är

$$f(x) = f(2) + (x-2)f'(2) + \frac{(x-2)^2}{2}f''(2) + \frac{(x-2)^3}{3!}B(x-2)$$

där $B(x-2)$ är en begränsad funktion. Vi måste således beräkna $f(2) = (1+2^2)^{1/4} = 5^{\frac{1}{4}}$,

$$f'(x) = \frac{x}{2}\left(1+x^2\right)^{-3/4} \Rightarrow f'(2) = 5^{-\frac{3}{4}}$$

och

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{4}} - \frac{3x^2}{4}\left(1+x^2\right)^{-\frac{7}{4}} \Rightarrow f''(2) = -\frac{1}{2}5^{-\frac{7}{4}}.$$

Vi får därför följande Taylorexpansion

$$f(x) = 5^{\frac{1}{4}} + 5^{-\frac{3}{4}}(x-2) - \frac{5^{-7/4}}{4} + \frac{(x-2)^3}{6}B(x).$$

Tentamen DEL 2.

Varje fråga tilldelas 6 poäng. Totalt 36 poäng. För C krävs 12 poäng, för B krävs 20 poäng och för ett A krävs 28 poäng.

Fråga 7: [Del 2] Bestäm den punkt på grafen till $f(x) = x^2 - 2x + 12$ som har en tangent som går genom punkten $(3, -4)$. Skissa din lösning.

[Motivera ditt svar.] **(6 poäng)**

Svar: Tangenten till grafen i punkten $(z, f(z))$ ge av

$$T_z(x) = (x-z)f'(z) + f(z) = 2(x-z)(z-1) + (z^2 - 2z + 12).$$

Punkten $(3, -4)$ ligger därför på tangentlinjen om

$$T_z(3) = -4,$$

Det vill säga om

$$2(3-z)(z-1) + (z^2 - 2z + 12) = -4 \Rightarrow 2z = -4 \Rightarrow z = 3 \pm \sqrt{19}.$$

Så det finns två punkter vars tangent går igenom $(3, -4)$. Dessa är är $\left(3 \pm \sqrt{19}, f(3 \pm \sqrt{19})\right) = \left(3 \pm \sqrt{19}, 34 \pm 4\sqrt{19}\right)$.

För full poäng skall grafen även skissas men jag avböjer från att göra det här.

Fråga 8: [Del 2] Beräkna följande integral

$$\int_1^2 \frac{x^4+1}{x^2(x^2+1)^2}dx.$$

[Fullständig motivering krävs.] **(6poäng)**

Svar: Observera att nämnaren är noll skiljd så integralen är inte generaliserad. Vi partialbråksuppdelar integranden

$$\frac{x^4+1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{\alpha x + \beta}{x^2+1} + \frac{\gamma x + \delta}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{a(x^5 + 2x^3 + x) + b(x^4 + 2x^2 + 1) + \alpha(x^5 + x^3) + \beta(x^4 + x^2) + \gamma x^3 + \delta x^2}{x^2(x^2+1)^2}.$$

Om vi jämför termer av samma ordning så får vi följande ekvationssystem som enkelt löses

$$\left.\begin{array}{l} a+\alpha=0 \\ b+\beta=1 \\ 2a+\alpha+\gamma=0 \\ 2b+\beta+\delta=0 \\ a=0 \\ b=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ b=1 \\ \alpha=0 \\ \beta=0 \\ \gamma=0 \\ \delta=-2. \end{array}\right.$$

Vi kan därför skriva integralen som

$$\int_1^2 \frac{x^4+1}{x^2(x^2+1)^2}dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx - \int_1^2 \frac{2}{(x^2+1)^2}dx. \tag{2}$$

Den första integralen är enkel att beräkna

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^2 = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

För att beräkna den andra integralen så observerar vi att

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2+1}dx = \int_1^2 \frac{dx}{dx}\frac{1}{x^2+1}dx = \left\{\begin{array}{l}\text{partiel} \\ \text{integration}\end{array}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\int_1^2 \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{1}{10}+2\int_1^2\left(\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{(x^2+1)^2}\right)dx$$

Vi får därför att

$$\int_1^2 \frac{2}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{3}{10}+\int_1^2 \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan(2)-\arctan(1)-\frac{1}{10}. \tag{4}$$

Om vi sätter samman (2), (3) och (4) så får vi

$$\int_1^2 \frac{x^4+1}{x^2(x^2+1)^2}dx = \frac{3}{5}-\arctan(2)+\arctan(1).$$

Fråga 9: [Del 2] Låt $K(t)$ vara den rotationskropp som fås då arean under $y=2\sqrt{x}$, $0<x<t$ roteras ett varv kring $x-$axeln. Låt $V(t)$ och $Y(t)$ vara volymen respektive ytan av kroppen $K(t)$. Beräkna ytan av kroppen $K(t)$ och det $t>0$ så att $V'(t)=Y'(t)$.

[Fullständig motivering krävs.] **(6poäng)**

Svar: Volymen av $K(t)$ kan beräknas

$$V(t) = 4\pi\int_0^t xdt \Rightarrow V(t) = 2\pi t^2, \tag{5}$$

där i har använt formeln för en rotationsvolym $\pi\int_a^b f(x)^2dx$ med $f(x)=2\sqrt{x}$.

Bottenytan av $K(t)$, dvs den del av ytan som ligger i planet $x=t$, beräknas enligt formeln πr^2. Dvs bottenytan är $4\pi t$. Använder vi också formeln för beräkning av en rotationsyta så får vi

$$Y(t) = 4\pi t + \int_0^t 4\pi\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}dx = 4\pi t + 4\pi\int_0^t \sqrt{1+x}dx = \tag{6}$$

$$4\pi t + \left[\frac{8\pi}{3}(1+x)^{3/2}\right]_{x=0}^t = 4\pi t + \frac{8\pi}{3}(1+t)^{3/2} - \frac{8\pi}{3},$$

vilket är ett delsvar.

För att avgöra det t då $V'(t)=Y'(t)$ så använder vi använder vi (6) och (5) tillsmammans med analysens huvudsats och ser att

$$Y'(t)=V'(t) \Rightarrow 4\pi + 4\pi\sqrt{1+t} = 8\pi t.$$

Detta kan skrivas om till $\sqrt{1+t}=2t-1$ eller $1+t=4t^2-4t+1$ så vi får

$$t = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{eller} \\ \frac{5}{4} & \end{array}\right.$$

vi får $t=\frac{5}{4}$ eftersom $t>0$ enligt uppgiftsformuleringen.

Fråga 10: [Del 2] Kom ihåg att vi, för varje mängd av reella tal A som är begränsad ovanifrån, definierade *den mista övre begränsningen till* A som det minsta tal M så att $M \geq a$ för alla $a \in A$. Bevisa följande sats

"Låt $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ....$ vara en begränsad sekvens med reella tal. Vidare så låter vi M vara den minsta övre begränsningen till mängden $A=\{a_1,a_2,a_3,...\}$. Då kommer $\lim_{n\to\infty} a_n = M$."

[Ett fullständigt bevis utifrån $\epsilon - \delta$ definitionen krävs.] **(6poäng)**

Svar: Vi behöver bevisa att det för varje $\epsilon > 0$ finns ett $N_\epsilon > 0$ så att

$$n > N_\epsilon \Rightarrow |a_n - M| < \epsilon.$$

Låt $\epsilon > 0$. Eftersom M är en minsta övre begränsning till $\{a_1, a_2, ...\}$ och $\epsilon > 0$ så är $M - \epsilon < M$ inte en övre begränsning. Detta innebär att det finns något $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ så att $a_{N_\epsilon} < M - \epsilon$. Eftersom M är en övre begränsning så gäller det att $a_n \leq M$ för alla n.

Detta ger oss följande, om $n > N_\epsilon$,

$$M - \epsilon < a_{N_\epsilon} \leq \left\{ \begin{array}{l} \text{efersom } a_n \\ \text{är växande} \end{array} \right\} \leq a_n \leq \left\{ \begin{array}{l} \text{efersom } M \\ \text{är en M.Ö.B.} \end{array} \right\} \leq M < M + \epsilon. \tag{7}$$

Vi kan skriva om (7) som

$$n > N_\epsilon \Rightarrow |a_n - M| < \epsilon$$

vilket skulle bevisas.

Fråga 11: [Del 2]

1. Vad är analysens huvudsats?

[Skriv ner huvudsatsen med alla antaganden.] **(1poäng)**

2. Bevisa analysens huvudsats. Du får använda integralkalkylens medelvärdessats utan bevis.

[Fullständig motivering krävs.] **(5poäng)**

Svar:

1.

Sats 1. [Analysesn Huvudsats] *Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ och att $x_0 \in]a, b[$. Antag vidare att*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{8}$$

då kommer $F'(x_0) = f(x_0)$.

2. Enligt uppgiftsformuleringen så kan vi antaga följande sats:

Sats 2. [Intergralkalkylens medelvärdessats.] *Antag att $f(x)$ är kontinuerlig på $[\alpha, \beta]$ då finns det ett $\xi \in [\alpha, \beta]$ så att*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = (\beta - \alpha)f(\xi).$$

Vi vill bevisa (8). Enligt definitionen av derivatan, gränsvärden och F så måste vi visa att om $x_0 \in]a, b[$ så finns det för varje $\epsilon > 0$ ett δ_ϵ så att

$$|h| \leq \delta_\epsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{h} \left(\int_a^{x_0+h} f(x)dx - \int_a^{x_0} f(x)dx \right) - f(x_0) \right| < \epsilon.$$

Eftersom

$$\int_a^{x_0+h} f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx$$

så kan absolutbeloppet skrivas

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx - f(x_0) \right| < \epsilon.$$

Enligt integralkalkylens medelvärdessats, vilken är applicerbar om $x_0 + h \in]a, b[$ vilket alltid är sant om $|h|$ är tillräckligt litet, så finns det ett $\xi_h \in [x_0, x_0 + h]$ (eller $\xi_h \in [x_0 + h, x_0]$ om $h < 0$) så att

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx = f(\xi_h) \Rightarrow \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx - f(x_0) \right| = |f(\xi_h) - f(x_0)|.$$

Observera att $|x_0 - \xi_h| < \delta_\epsilon$ om $|h| < \delta_\epsilon$. Det räcker därför att hitta ett $\delta_\epsilon > 0$ så att

$$|x_0 - y| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(y) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Men detta följer av definitionen av kontinuitet för f i punkten x_0 - dvs ett sådant $\delta_\epsilon > 0$ existerar.

Fråga 12: [Del 2] Under en lågflygning över Sibiriens tundra så löper James Bonds helikopter plötsligt amok. Rotorbladen lyder inte längre hans komandon och helikoptern börjar stiga med hastigheten $1m/s$. Helikopterns hastighet parallellt med markplanet är konstant $100m/s$. Herr Bonds enda räddning är att hoppa från helikoptern ner i en tunna med vatten som står $1000m$ bort i helikopterns färdriktning.

Det hela inträffar när helikoptern, med James Bond, befinner sig $y = 10e^{-2}$ meter över markplanet. Efter att James Bond hoppar från helikoptern så kommer hans position i höjdled att avgöras av följande differentialekvation

$$y''(t) = -10 - y'(t)$$

och hans position i helikopterns ursprungliga färdriktning parallellt med markplanet bestäms, efter det att han hoppat ur helikoptern, av följande differentialekvation

$$x''(t) = -x'(t).$$

Vid vilken tidpunkt t_0 skall James Bond hoppa ur helikoptern för att landa rätt i vattentunnan som står i markplan (dvs $y = 0$ och $x = 1000$).

[Fullständig motivering krävs.] **(6poäng)**

Svar: Fram till tiden t_0 så gäller det att $y' = 1$ och $x' = 100$, där y är Mr Bonds höjd över marken och x Mr Bonds position i x riktningen. Mer specifikt så kommer vi att låta $(x(t), y(t))$ vara James position i tidpunkten $t_0 + t$ där t_0 är tidpunkten då James hoppar ur helikoptern. Då gäller det, för $t \geq 0$, att

$$y''(t) = -10 - y'(t) \tag{9}$$

$$y'(0) = 1 \tag{10}$$

$$y(0) = 10e^{-2} + t_0 \tag{11}$$

där vi har använt att höjden har ökat med t_0 meter fram tills tiden t_0 i ekvation (11) och att hastigheten i höjdled är $1m/s$ i ekvation (10).

Partikulärlösningen är $y_p = -10t$ och den homogena lösningen är $y_h(t) = a + be^{-t}$. Använd $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$ i (10) så får vi direkt att $-10 - 1 = 1$, dvs $b = -11$. Ur (11) beräknar vi $y(0) = a - 11 = 10e^{-2} + t_0$ vilket ger att $a = 10e^{-2} + 11 + t_0$.

Vi får därför, för $t \geq 0$, att

$$y(t) = -10t - 11e^{-t} + 10e^{-2} + 11 + t_0.$$

Bond slår i marken, eller förhoppningsvis i vattentunnan, då $y(T) = 0$ det vill säga då

$$-10T - 11e^{-T} + 10e^{-2} + 11 + t_0 = 0 \tag{12}$$

Differentialekvationen för x är

$$x''(t) = -x'(t) \tag{13}$$

$$x(0) = 100t_0 \tag{14}$$

$$x'(0) = 100 \tag{15}$$

där vi har använt att hastigheten i $x-$led är $100m/s$ när han hoppar ur helikoptern i (15) och att vid tiden t_0 så har han färdats $100t_0m$ i (14).

Lösningen till (13) är $x(t) = c + de^{-t}$. Ekvation (15) ger $d = -100$ och (14) ger att $c - 100e^{-0} = 100t_0$ dvs $c = 100(1 + t_0)$. För $t > 0$ så får vi därför att

$$x(t) = 100(1 + t_0) - 100e^{-t}.$$

Vi vill att $x = 1000$ då James slår i marken, dvs $x(T) = 1000$ vilket innebär

$$100(1 + t_0) - 100e^{-T} = 1000 \Rightarrow (1 + t_0) - e^{-T} = 10. \tag{16}$$

Ur (12) och (16) får vi

$$1 + t_0 = 10T + 11e^{-T} - 10e^{-2} - 10 \tag{17}$$

$$1 + t_0 = e^{-T} + 10. \tag{18}$$

Ekvation (17) och (18) ger

$$T + e^{-T} = 2 + e^{-2}$$

vilket ger $T = 2$. Sätter vi in det i ekvation (18) så får vi $t_0 = 9 + e^{-2}$.

Svar: James skall hoppa ur helikoptern $t_0 = 9 + e^{-2}$ sekunder efter att han förlorar kontrollen av helikoptern.

Kommentar: Man kan ju fråga sig om James Bond skulle överleva ett fall på nästan 10.5 meter ner i en vattentunna. Men då Darren Taylor har ett värdsrekord i "sallow diving" för att ha dykt ner i en 30cm djup pol från 11.15m höjd (eller snarare magplaskat sig ner i en 30cm djup pol från 11m höjd) så hyser jag inga tvivel om att en så god agent som James Bond enkelt överlever en tunndykning. Frågan är om han klarar av att lösa en differentialekvation på mindre än tio sekunder.