

# Uppgifter Fredag v46 - Måndag v47 del 1 SF1602 Diff. Int.

**1:** Läs avsnitt 6.5 i Persson-Böjers före föreläsningen den 15e November.

**2:** Beräkna följande uppgifter i Persson-Böjers.

**a)** 6.24, 6.26ab, 6.28a, 6.29ac, **b)** 6.32ab, 6.33a, 6.34, 6.38, 6.40

**3:** Titta igenom följande uppgifter. Vi kan komma (jag ska i alla fall försöka att hitta tid) att diskutera dem på föreläsningen den 15e November:

i) Om  $f(x)$  är en kontinuerlig funktion på  $\mathbb{R}$  så att  $f(x) \leq 10$  kommer då  $\int_{-2}^1 f(x)dx \leq 30$ ? Kommer  $\int_{-2}^1 f^2(x)dx \leq 300$ ?

ii) Om  $f(x)$  är en kontinuerlig funktion på  $]0, \infty[$  så att  $|f(x)| \leq |x|^\alpha$  för alla  $x > 0$ . För vilka värden på  $a > 0$  och  $\alpha$  kommer  $\int_a^\infty |f(x)|^2 dx$  garanterat att vara konvergent?

iii) Är sats 11 på sidan 316 sats sann utan antagandet  $f \geq 0$ ?

iv) **Svår?** Låt  $f(x)$  vara integrerbar på  $[-1, 1]$  och  $f(0) = 0$ . Är den generaliserade integralen  $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{x} dx$  konvergent om  $f(x)$  är begränsad? Kontinuerlig (LEDTRÅD: Är  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|\ln(|x|)|} & \text{om } x \neq 0 \\ 0 & \text{om } x = 0 \end{cases}$  kontinuerlig?)? Deriverbar?

v) Antag att  $f(x)$  är kontinuerlig på  $[0, 1]$  och att den generaliserade integralen  $\int_0^1 \frac{|f(x)|}{x} dx$  konvergerar. Kommer då  $\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x} dx$  att konvergera?

**4:** Läs avsnitt 7.1-7.5 i Persson-Böiers före föreläsningen den 18e November.

**5:** Beräkna följande tal

**a)** 7.1, 7.3, 7.7, 7.11 **b)** 7.14, 7.19, 7.23ab) **c)** 7.30, 7.31, 7.32

På övningen den 19e November kommer ni att beräkna 6.35, 6.50, 6.52, 7.8, 7.65 samt fråga 9 och 10 på detta blad.

**6:** Titta igenom följande uppgifter. Vi kan komma (jag ska i alla fall försöka att hitta tid) att diskutera dem på föreläsningen den 13e November:

vi) Vi vet att  $1 - |x|$  inte är primitiv funktion till någon funktion definierad på  $[-1, 1]$  (eftersom derivatan av  $1 - |x|$  inte är definierad i  $x = 0$ ). Men finns det någon funktion  $f(x)$  så att  $1 - |x| = \int_{-1}^x f(t)dt$ ? Reflektera!

vii) Vilken kurva i planet är  $(\sin(t), \cos(t))$  för  $t \in [0, 2\pi[$ ? Vilken kurva är  $(2\sin(t), 3\cos(t))$  för  $t \in [0, 2\pi[$ ? Vilken kurva är  $(\sin(t), \cos(t))$  för  $t \in [0, 4\pi[$ ?

viii) Rotationsvolymen som fås när området mellan grafen av den kontinuerliga funktionen  $f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  roteras kring  $x$ -axeln är noll. Vad är  $f(x)$ ?

ix) Finns det någon rotationssymmetrisk kropp given av en deriverbar funktion  $f(x)$  på  $[0, \infty[$  så att kroppens yta är oändlig men dess volym ändlig?

x) Finns det någon rotationssymmetrisk kropp given av en begränsad och deriverbar funktion  $f(x)$  på  $[0, \infty[$  så att kroppens volym är oändlig men dess yta ändlig?

LEDTRÅD: Eftersom  $f'(x)^2 \geq 0$  så kommer  $\sqrt{1 + f'(x)^2} \geq 1$ .

**7: Bevisuppgift 1:** Vi säger att en funktion  $f(x)$  definierad på  $[a, b]$  är styckvis kontinuerlig om det finns ändligt många punkter  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$  så att  $f(x)$  är kontinuerlig på intervallen  $]a, x_1[$ ,  $]x_1, x_2[$ ,  $]x_3, x_4[$ , ... och  $]x_n, b[$ .

1. I Persson-Böiers på sidan 299 hävdas det att varje styckvis kontinuerlig funktion är integrerbar. Visa med ett motexempel att det inte är sant.

LEDTRÅD: Titta på nästa delfråga.

2. Visa att varje styckvis kontinuerlig och begränsad funktion  $f(x)$  på  $[a, b]$  är integrerbar. Använd gärna följande steg:
- Visa det för varje  $\epsilon > 0$  och  $\delta > 0$  finns trappfunktioner  $\Psi_i(x)$  och  $\Theta_i(x)$  definierade på  $[a, b]$ ,  $\Psi_i(x) = \Theta_i(x) = 0$  för  $x \notin [x_i + \delta, x_{i+1} - \delta]$ , så att  $\Psi(x) \leq f(x) \leq \Theta(x)$  på  $[x_i + \delta, x_{i+1} - \delta]$  och  $I(\theta) - I(\Psi) < \epsilon/(2n)$ .
  - Givet ett  $\delta > 0$ . Visa att om  $|f(x)| \leq M$  så finns det trappfunktioner  $\Psi_d(x)$  och  $\Theta_d(x)$  ("d" står för diskontinuerlig), så att  $\Psi_d(x) = \Theta_d(x) = 0$  för  $x \notin [x_i - \delta, x_i + \delta]$  för något  $i = 1, 2, \dots, n$ , så att  $\Psi_d(x) \leq f(x) \leq \Theta_d(x)$  för alla  $x \in [x_i - \delta, x_i + \delta]$  för något  $i = 1, 2, \dots, n$  och  $I(\Theta_d) - I(\Psi_d) \leq 4nM\delta$ .
  - Visa att  $\Psi(x) = \Psi_d + \sum_{i=1}^n \Psi_i(x)$  och  $\Theta(x) = \Theta_d(x) + \sum_{i=1}^n \Theta_i(x)$  är trappfunktioner. Visa också att givet ett  $\epsilon > 0$  så kan du välja  $\delta > 0$  så att  $I(\Theta) - I(\Psi) < \epsilon$ .

**8: Bevisuppgift 2 (Konceptuellt svår och utanför den här kursen.)** I den här uppgiften så är alla funktioner definierade på  $[0, 1]$ . För varje begränsad funktion  $f$  så låter vi  $\|f\|$  vara det minsta icke negativa tal så att  $-\|f\| \leq f(x) \leq \|f\|$  för alla  $x \in [0, 1]$ . Vi definierar avståndet mellan två funktioner  $f(x)$  och  $g(x)$  som  $\|f(x) - g(x)\|$ .

Vidare så säger vi att en sekvens funktioner  $f_k(x)$  konvergerar till  $f(x)$  när  $k$  går mot oändligheten, eller  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$  om det för varje  $\epsilon > 0$  existerar ett  $N_\epsilon > 0$  så att

$$\|f_k(x) - f(x)\| < \epsilon \quad \text{för alla } k > N_\epsilon.$$

Visa att om  $f_k(x)$  är en sekvens kontinuerliga funktioner och  $f(x)$  är en funktion så att  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$  då är  $f(x)$  integrerbar.

**9: Tentamensfråga: [Del 1, Modul 3]**

- Låt  $f(x)$  vara deriverbar på  $\mathbb{R}$  och  $F(x) = \int f(x)dx$ . Ange ett villkår på  $f(x)$  som garanterar att  $F(x)$  är strikt konvex. [ANGE VILLKÅRET.] **(1poäng)**
- Ange en funktion  $f(x)$  som är växande men  $\int f(x)dx$  avtagande? [SVARA MED ATT ANGE FUNKTIONEN.] **(1poäng)**
- Bestäm alla primitiva funktioner till

$$\int \frac{5}{(x+3)^2} \sqrt{\frac{x+3}{x+2}}.$$

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(4poäng)**

- 10:** Hitta alla primitiva funktioner till  $\frac{a}{b+c \sin(x)}$  och  $b^2 > c^2$ . Markera tydligt var du använder  $b^2 > c^2$ . [FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(6poäng)**

**Kontorstid:** Fredagen den 22a November 15-16.