

Uppgifter vecka 46 del 1 SF1602 Diff. Int.

1: Läs, eller läs om, avsnitt 6.2, 6.3 och om likformig kontinuitet i appendix C i Persson-Böjers före föreläsningen den 12e November.

2: Beräkna följande uppgifter i Persson-Böjers.

a) 6.22 **b)** Eftersom det bara en uppgift till den här föreläsningen och väldigt många till nästa så föreslår jag att ni även betraktar punkt 4 och 5 nedan redan nu.

3: Titta igenom följande uppgifter. Vi kan komma (jag ska i alla fall försöka att hitta tid) att diskutera dem på föreläsningen den 12e November:

i) Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[0, 1]$ kan man då skriva $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \frac{1}{k} f(n/k)$ på ett enklare sätt?

ii) Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[-1, 1]$ och $-1 = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < x_{n+1} \dots < 1$ är punkter så att $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ kommer då $\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| f(x_n) = \int_{-1}^1 f(x) dx$?

iii) Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[0, \infty]$ kommer då $\int_0^{\infty} f(x) dx$ att existera? Kommer, för varje tal $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a \geq 0$, $\int_a^b f(x) dx$ att existera?

iv) Låt $f_1, f_2, f_3, \dots$ vara en oändlig mängd kontinuerliga funktioner definierade på $[0, 1]$, kommer då $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx$?

v) Om $f(x)$ är integrerbar och begränsad på $[-5, 5]$ finns det då ett tal c så att $10c = \int_{-5}^5 f(x) dx$? Finns det ett $x_c \in [-5, 5]$ så att $f(x_c) = c$?

4: Läs avsnitt 6.4 i Persson-Böjers före föreläsningen den 13e November.

5: Beräkna följande tal

a) 6.7, 6.9, 6.10 **b)** 6.12ac), 6.15abc) **c)** 6.16ac, 6.17ac, 6.18ac, 6.19a **d)** 6.37 och 6.45

På övningen den 14e November kommer ni att beräkna 6.8, 6.9, 6.12b), 6.15d), 6.19b), 6.22, 6.46 och 6.48 samt fråga 8 och 9 på detta blad.

6: Titta igenom följande uppgifter. Vi kan komma (jag ska i alla fall försöka att hitta tid) att diskutera dem på föreläsningen den 13e November:

vi) För vilka integrerbara funktioner $f(x)$ gäller $\left| \int_{-3}^4 f(x) dx \right| = \int_{-3}^4 |f(x)| dx$?

vii) Antag att $f(x)$ och $g(x) \geq 0$ är deriverbara på $[0, \infty]$, vad är $D \int_0^{g(x)} f(x) dx$? Kan vi försvaga något antagande och dra samma slutsats?

viii) Om $f(1) = -1$ och $\int_1^5 f'(x) dx = 2$ vad är $f(5)$?

ix) Gäller den generaliserade medelvärdessatsen utan antagandet $g \geq 0$? Om inte hitta på ett motexempel.

x) Om $f(x)$ är kontinuerlig på $[a, b]$ så $D \int_a^x f(t) dt = f(x)$ enligt analysens huvudsats. Låt

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{om } x < 0 \\ 0 & \text{om } x = 0 \\ 1 & \text{om } x > 0 \end{cases}$$

och $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$. För vilka x är $F'(x)$ definierad, vad är värdet av $F'(x)$ i dessa punkter? Är höger respektive vänsterderivatan definierad, vad är värdet av höger och vänsterderivatan i så fall?

7: Bevisuppgift 1 (Hölders olikhet): Bevisa Hölders olikhet. Dvs om $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga på $[0, 1]$ så

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx \leq \left(\int_{-1}^1 f(x)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-1}^1 g(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Använd gärna följande steg:

1. Visa att $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 f(x)^2 dx + \int_{-1}^1 g(x)^2 dx \right)$.

LEDTRÅD: Kan du visa olikheten utan integraltecknen?

2. Bevisa att om $\int_{-1}^1 f(x)^2 dx = 1$ och $\int_{-1}^1 g(x)^2 dx = 1$ så kommer $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx \leq 1$.

LEDTRÅD: Föregående steg.

3. Beteckna $\|f\|_{L^2(-1,1)} = \left(\int_{-1}^1 f(x)^2 dx \right)^{1/2}$ och låt $\tilde{f}(x) = \frac{1}{\|f\|_{L^2(-1,1)}} f(x)$ samt $\tilde{g}(x) = \frac{1}{\|g\|_{L^2(-1,1)}} g(x)$.

Kan man använda föregående steg på $\tilde{f}$ och $\tilde{g}$? Vad betyder det för f och g ?

8: Bevisuppgift 2 (Osäkerhetsprincipen): Bevisa att om $f(x)$ är kontinuerligt deriverbar på $[-1, 1]$, $f(-1) = f(1) = 0$ och $\int_{-1}^1 f(x)^2 dx = 1$ så gäller följande olikhet:

$$\int_{-1}^1 x^2 f(x)^2 dx \int_{-1}^1 f'(x)^2 dx \geq \frac{1}{4}.$$

LEDTRÅD: Kan du använda partiell integration på $\int_{-1}^1 f(x)^2 dx = 1$ tillsammans med Hölders olikhet?

8: Tentamensfråga: [Del 1, Modul 2]

1. Ange en funktion $f(x)$ så att $f(1) = 1$ och $f'(1) = 0$.

[SVARA MED ETT EXEMPEL ELLER "OMÖJLIGT".] **(1poäng)**

2. Låt $f(x)$ vara en injektiv funktion definierad på $[0, 1]$. Ange värdemängden till f^{-1} .

[SVARA MED EN MÄNGD ELLER "OMÖJLIGT ATT AVGÖRA".] **(1poäng)**

3. Låt

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + 1) & \text{om } x < 0 \\ \cos(\sin(x) + \tan(x)) & \text{om } x \geq 0 \end{cases}$$

vara en funktion definierad på $\mathbb{R}$. Beräkna $f'(x)$.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(4poäng)**

9: Tentamensfråga: [Del 2] Följande påstående är felaktigt: "Om $f'(x) \leq 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$ så kommer $f(x) \leq f(0) + |x|$." Identifiera felet och bevisa att påståendet är felaktigt. Lägg till ett nytt, och rimligt, antagande som gör påståendet riktigt och bevisa det riktiga påståendet.

[FULLSTÄNDIG MOTIVERING KRÄVS.] **(6poäng)**

Kontorstid: Fredagen den 15e November efter föreläsningen (ca 12-13).