Kontrollskrivning nr 1 SF1603 FlerVariabelAnalys (med svar)
onsdag 26 februari 2014.

Ordinarie skrivtid 105 minuter. Inga hjälpmedel. Alla införda beteckningar skall förklaras. Alla resonemang skall kunna följas.

1 a) Antag att Π är ett tangentplan till en sfär Σ. Finns det då alltid ett *annat, parallellt* plan $\widetilde{\Pi}$, som även det är ett tangentplan till Σ?
Ditt svar till denna del a) behöver inte innehålla några formler eller kalkyler.

b) Antag nu att Π är ett tangentplan till ytan

$$\mathcal{H} \quad : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \delta \ ,$$

där det fixa talet δ är $+1$ eller -1. (Här är a, b och c positiva konstanter.)
Finns det då alltid ett *annat* (distinkt, skilt) parallellt plan $\widetilde{\Pi}$, som även det är ett tangentplan till $\mathcal{H}$?
Du måste motivera Ditt svar med formler och/eller kalkyler.

2. Låt r beteckna avståndet från origo i planet och t beteckna tiden. En viss vattentemperatur $V = V(r,t)$ i planet antages satisfiera differentialekvationen

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} \ , \qquad \text{då} \quad r > 0 \ , \ t > 0 \ .$$

Det finns lösningar på formen $V = g\left(\dfrac{r^2}{t}\right)$. Bestäm alla sådana lösningar.

3. En kulle beskrivs av grafen $z = \exp\left(-\dfrac{x^2}{2} - 2\,y^2 \right)$.
a) Var är denna kulle brantast?
b) Hur brant är kullen där den är som brantast?

Svar och lösningar.

1 a) Om det givna tangentplanet tangerar sfären i nordpolen och alltså är horisontellt, så finns ett parallellt och horisontellt plan som tangerar sfären i sydpolen.
Nordpolen och sydpolen kallas antipodala punkter på sfären.
På samma sätt har alla andra punkter på sfären en antipodal punkt, som man når genom att från den givna punkten på sfären följa diametern rätt igenom sfärens centrum till den punkt på sfären, som ligger längst bort ifrån den givna.
En punkt och dess antipodala punkt har var sitt tangentplan, som är parallella.

b) Ytan $\mathcal{H}$ är identisk med nivåytan $G(x,y,z) = \delta$, där funktionen G ges av $G(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$. Uti en punkt $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ på denna yta ges en normal till tangentplanet T_1 av gradienten $\mathbf{n}_1 = \operatorname{grad} G = \left(\frac{2x_1}{a^2}, \frac{2y_1}{b^2}, -\frac{2z_1}{c^2}\right)$. För att finna ett annat tangentplan T_2 med en normal $\mathbf{n}_2$, som är parallell med $\mathbf{n}_1$, så

räcker det med att titta på den antipodala punkten $\mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_1 = (-x_1, -y_1, -z_1)$ till $\mathbf{r}_1$, med normal $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$.
Dessa två tangentplan har ekvationerna $T_1 \quad : \quad \dfrac{x_1\,x}{a^2} + \dfrac{y_1\,y}{b^2} - \dfrac{z_1\,z}{c^2} = \delta$, och $T_2 \quad : \quad \dfrac{x_1\,x}{a^2} + \dfrac{y_1\,y}{b^2} - \dfrac{z_1\,z}{c^2} = -\delta$, så de är parallella men icke sammanfallande.

2. Om vi antager att $V(r,t) = g\left(\dfrac{r^2}{t}\right)$, så blir $\dfrac{\partial V}{\partial r} = \dfrac{2\,r}{t}\,g'\left(\dfrac{r^2}{t}\right)$,
$\dfrac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \dfrac{2}{t}\,g'\left(\dfrac{r^2}{t}\right) + \dfrac{4\,r^2}{t^2}\,g''\left(\dfrac{r^2}{t}\right)$, och $\dfrac{\partial V}{\partial t} = \left(-\dfrac{r^2}{t^2}\right)g'\left(\dfrac{r^2}{t}\right)$. Med detta fås

$$0 = \{\text{givet}\} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial t} = \left(\frac{2}{t}\,g' + \frac{4\,r^2}{t^2}\,g''\right) - \frac{2}{t}\,g' - \left(-\frac{r^2}{t^2}\right)g' =$$

$= \dfrac{r^2}{t^2}\,(4g'' + g')$, Den linjära ordinära differentialekvationen $4g'' + g' = 0$ har karakteristisk ekvation $4\lambda^2 + \lambda = 0$ med rötterna $\lambda = 0$ och $\lambda = -1/4$, varav $g(u) = A + B\,\mathrm{e}^{-u/4}$, där A och B är godtyckliga konstanter.
Då blir $V = A + B\,\exp(-r^2/4t)$.

3. Skriv $h(x,y) = \exp\left(-\dfrac{x^2}{2} - 2\,y^2\right)$. Lutningen bestäms av storleken (absolutbeloppet) hos gradienten $\operatorname{grad} h = (-x, -4y)\,h(x,y)$. Gradientens absolutbelopp blir maximalt precis då funktionen $f(x,y) = |\operatorname{grad} h|^2 =$
$= (x^2 + 16y^2)\,\exp\Big(-x^2 - 4y^2\Big)$ blir maximal. Där detta inträffar måste

$$0 = \operatorname{grad} f = \Big(2x - 2x\,(x^2 + 16y^2)\,,\ 32y - 8y\,(x^2 + 16y^2)\Big)\,h^2\,.$$

Men $h \neq 0$, så vi får två ekvationer $2\,x\,(x^2 + 16y^2 - 1) = 0$ och $8\,y\,(x^2 + 16y^2 - 4) = 0$. Om $x = 0$ finner man y-värdena 0 och $\pm 1/2$. Om $y = 0$ finner man x-värdena 0 och ± 1. Om både x och y skulle vara nollskilda, så uppstår kravet att kvadratsumman $x^2 + 16y^2$ skulle behöva vara lika med både 1 och 4 samtidigt (vilket ju icke är möjligt). Vi finner alltså sammanlagt fem punkter i planet, där $\operatorname{grad} f = 0$. I punkten $x = 0$, $y = 0$ når kullen sin högsta höjd $h(0,0) = 1$, och i denna punkt är då lutningen $|\operatorname{grad} h(0,0)| = 0$. De två intressanta lutningarna blir $|\operatorname{grad} h(0, \pm 1/2)| = 2/\sqrt{\mathrm{e}}$, och $|\operatorname{grad} h(\pm 1, 0)| = 1/\sqrt{\mathrm{e}}$. Eftersom kullen planar ut mot xy-planet, då vi avlägsnar oss från origo i xy-planet, har vi funnit den största lutningen $2/\sqrt{\mathrm{e}}$.

Anm 1. Man får i stort sett samma ekvationssystem att lösa, om man söker stationära punkter för funktionen $g(x,y) = |\operatorname{grad} h| = \sqrt{f}$ istället för för f, eftersom
$\operatorname{grad} g = \cdots = \dfrac{1}{2g}\operatorname{grad} f$, $\qquad$ alias $\qquad \operatorname{grad}(g^2) = (2\,g)\operatorname{grad} g$.

Anm 2. Exponentialfunktionen skrivs ofta $\exp\alpha = \mathrm{e}^{\alpha}$.