Institutionen för matematik, KTH. **Tentamen 26 maj 2014.**

SF1603, FlerVariabelAnalys för F1 & CL-MAFY2.

Inga hjälpmedel tillåtna. Svar och beräkningar skall motiveras. Alla resonemang måste gå att följa. Tentamensskrivningen består av två delar: del I omfattar 10 uppgifter à 4 poäng var; del II omfattar 6 (eller 7) uppgifter à 6 poäng var. En godkänd KS1 ersätter tentamensuppgift 1. En godkänd KS2 ersätter tentamensuppgift 2. Varje godkänd inlupp ger en bonuspoäng vid tentamen. För godkänt (= betyg E) krävs 26 poäng (på del I-II), inklusive bonus. Betyg D erhålles vid uppnådda 31 poäng (på del I-II), inklusive bonus. För betyg C, B, A måste man vara godkänd och ha uppnått ett visst antal poäng på del II. Om man på tentamen har uppnått 24 poäng (inklusive bonus), med sex eller fler uppgifter som är *väsentligen rätt*, ges betyg Fx, med möjlighet till muntlig (eller skriftlig) komplettering av tentamen. Endast betyg E kan då erhållas.

För äldre teknologer ges betygen 5, 4, 3, K och U, där 3 motsvarar E, K motsvarar Fx och U (underkänd) motsvarar F.

Kurshemsida: http://www.math.kth.se/math/GRU/2013.2014/SF1603/CTFYS/

Del I. Tio uppgifter à 4 poäng.

1. Bestäm tangentplanet till ytan $z^2 = 25 - 9x^2 - 4y^2$ i punkten $(-1, 2, 0)$.

2. En glass-strut G beskrivs av att mängden G ligger ovanför xy-planet, av att alla dess punkter ligger närmare z-axeln än xy-planet, samt att alla punkter i G ligger på ett avstånd högst R från origo. Beräkna volymen för G.

3. En partikel antages röra sig längs banan $3x^2 + 3y^2 = 2xy + 8$. Bestäm partikelns minsta och största avstånd från origo.

4. Låt $g(x, y) = f(u, v)$, där $u = x^2 - y^2$ och $v = 2xy$. Beräkna den blandade andraderivatan $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\, \partial y}$. Försök uttrycka svaret enbart med hjälp av f, u och v.

5. Antager funktionen $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}\, \exp(-x^2/8 - y^2/18)$ något största eller minsta värde? Besvara frågan och bestäm ev. största och/eller ev. minsta värde.

6. Antag att den differentierbara funktionen f satisfierar differentialekvationen $(5x - 8y)\dfrac{\partial f}{\partial x} + (6x - 5y)\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$. Visa att kurvan $3x^2 + 4y^2 - 5xy = 7$ är en nivåkurva till funktionen f.

7. Längs en mycket lång vägg, som möter den plana marken vinkelrätt, skall några ungdomar bygga en liten koja bestående av ett rektangulärt tak, en rektangulär långvägg samt tvenne rektangulära gavlar, som alla möter varandra under rät vinkel. Bestäm optimala proportioner för denna koja, om de vill få maximal volym med en given mängd byggmaterial.

8. En tetraeder har ett hörn på x-axeln med intercept $x = a > 0$, ett hörn på y-axeln med intercept $y = b > 0$, ett hörn på z-axeln med intercept $z = c > 0$, samt ett hörn i origo. Ställ upp dess volym som en trippelintegral och beräkna den.

9. Betrakta ekvationen $7x - 3y = 5x^4 + 2y^5$. Visa att man i någon omgivning av origo kan lösa ut (uttrycka, behandla) x som funktion av y.

10. Låt $f(\mathbf{r}) = x^2$, $g(\mathbf{r}) = y^2$ och $h(\mathbf{r}) = z^2$, där $\mathbf{r} = (x, y, z)$.
Bestäm medelvärdet över enhetsklotet för de tre funktionerna f, g och h.

Del II. Sex uppgifter à 6 poäng.

11. Evaluera integralen $\displaystyle\iint \frac{1}{1 + (x + y)^4}\, dx\, dy$ över första kvadranten.

12. Låt γ vara den orienterade bågen från punkten $(2, 1)$ till punkten $(-2, 1)$ längs parabeln $x^2 + y = 5$. Beräkna kurvintegralen

$$I = \int_\gamma e^{(x^2 - y^2)}(2x\, dx - 2y\, dy) + \frac{(x + 9)\, dy - (y - 1)\, dx}{(x + 9)^2 + (y - 1)^2} + 2y\, dx + 5x\, dy\,.$$

13. Innan det börjar regna beskrivs ett landskap av höjdfunktionen
$z = f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - x^4 - y^4$.

Visa att det bildas en liten vattenpöl kring origo, då det börjar regna.

Allteftersom det regnar växer vattenpölen till en liten sjö. Hur stort blir vattendjupet i sjön innan den börjar svämma över sina bräddar, och **var** svämmar sjön över?

När sjön nått sitt maximala djup, har den också fått en strandlinje. Hur lyder ekvationen för denna strandlinje?

14. Antag att Y är en sammanhängande, sluten yta i rummet utan rand och med kontinuerligt varierande enhetsnormal $\mathbf{N}$ utåt överallt. Låt vektorfältet $\mathbf{F}$ ges av $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (y^2 - z^2 + 4x,\, x^2 + z^2 + 4(x - y)z^2,\, (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - z))$. Bestäm det maximala värdet som flödesintegralen $\Phi = \Phi(Y) = \displaystyle\iint_Y \mathbf{F} \bullet \mathbf{N}\, dS$ kan antaga.

15. Avgör om kurvan $3y^2 = x^2 - x^4$ är en enkel, sluten kurva, eller om den liknar en stående eller liggande åtta.

Om en kurva skär sig själv (i en dubbelpunkt), så är det naturligt att försöka bestämma **två** tangenter till kurvan i samma punkt, där de var och en är tangent till var sin del av kurvan genom dubbelpunkten. Vinkeln mellan kurvans två grenar genom dubbelpunkten definieras då som brukligt såsom vinkeln mellan de två tangenterna. Bestäm denna vinkel för kurvan ovan.

16. Bestäm det maximala värdet som integralen

$$\int_\gamma e^{-(x^2 + y^2)}\{(1 - x^2 + y^2)\, 2x\, dx - (1 + x^2 - y^2)\, 2y\, dy\}$$

kan antaga, där γ är en kurva i planet.

Lycka till!

Korta svar.

1. $-9\,(x+1)+8\,(y-2)=0$

2. $\dfrac{2\pi}{3}\,R^3\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; enklast medelst sfäriska polära koordinater, där $0\le\theta\le\pi/4$ och $0\le r\le R$.

3. min $=\sqrt{2}$, max $=2$.

4. $2\,v\,(\,f''_{vv}-f''_{uu}\,)+4\,u\,f''_{uv}+2\,f'_{v}$

5. Ja, min $=0$, max $=3/\sqrt{\mathrm{e}}$

6. gradienterna parallella

7. Svar: skall se ut som två mindre hopsatta kuber med borttagen mellanvägg; proportionerna skall bli $1:1:2$.

8. $V=abc/6$, men trippelintegralen måste också vara korrekt uppställd.

9. Implicita funktionssatsen ger svaret, eftersom tangenten ges av $7\,x-3\,y=0$.

10. Alla tre har samma medelvärde $1/5$.

11. $\pi/4$

12. Green ger $32-8=24$.

13. djup $=1=f(\pm1,0)=f(0,\pm1)$; strandlinjens ekvation lyder $f(x,y)=1$.

14. Gauss ger $128\,\pi/15$.

15. Liggande åtta. De två funktionsgrenarna nära dubbelpunkten ges av $y\sqrt{3}=\pm\,x\sqrt{1-x^2}$. Tangenterna ges tillsammans av $3\,y^2=x^2$.

16. Potential $U(x,y)=(x^2-y^2)\exp(-x^2-y^2)$. max för integralen blir max $U-$ min $U=U(\pm1,0)-U(0,\pm1)=2/\sqrt{\mathrm{e}}$.

Förslag till lösningar. Vid tryckfel, kontakta föreläsaren.

1. Funktionen $G(x, y, z) = 9x^2 + 4y^2 + z^2$ har gradienten $\mathbf{H}(x, y, z) = (18x, 8y, 2z)$ och i den givna punkten blir $\mathbf{n} = \mathbf{H}(-1, 2, 0) = (-18, 16, 0)$ en normalvektor till det sökta planet med ekvation $18(x + 1) = 16(y - 2)$ eller varianter därav.

2. Mängden G kan beskrivas av olikheterna $r < R, x^2 + y^2 < z^2, z > 0$, eller av att $r > R, 0 \le \theta < \pi/4$, vilket ger
vol $G = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/4} \sin\theta d\theta \int_0^R r^2 dr = 2\pi(1 - 1/\sqrt{2})R^3/3$.

3. Med funktionerna $f(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 2xy$ och $g(x, y) = x^2 + y^2$ med gradienterna $F(x, y) = (6x - 2y, -2x + 6y)$, $G(x, y) = (2x, 2y)$ ger Lagranges metod intressanta punkter, då dessa gradienter är parallella, vilket gäller då deras kryssprodukt är noll, vilket inträffar då $x^2 = y^2$. Fallet $x = y$ ger $x^2 = 2$ med avståndet 2, medan fallet $x = -y$ ger $x^2 = 1$ med avståndet $\sqrt{2}$.

4. Vi skriver här $g_y = \dfrac{\partial g}{\partial y}$, $f_1 = \dfrac{\partial f}{\partial u}$, $f_2 = \dfrac{\partial f}{\partial v} = f_v$, $f_{11} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} = f_{uu}$,
$f_{12} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial u\, \partial v} = f_{uv} = f_{vu} = f_{21} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial v\, \partial u}$, $f_{22} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} = f_{vv}$.
Man får $g_y = f_1\,(-2y) + f_2\,(2x)$ och

$$\begin{aligned} g_{yx} &= \frac{\partial}{\partial x} g_y = \cdots = f_{11}\,(-4xy) + f_{12}\,(-4y^2) + f_{21}\,(4x^2) + f_{22}\,(4xy) + 2f_2 = \\ &= f_{11}\,(-2v) + f_{12}\,(4x^2 - 4y^2) + f_{22}\,(2v) + 2f_2 = 2v\,(f_{22} - f_{11}) + 4uf_{12} + 2f_2 = \\ &= 2v\,(f_{vv} - f_{uu}) + 4uf_{uv} + 2f_v = \text{svaret}. \end{aligned}$$

5 . Funktionen är noll i origo och aldrig negativ, så minimum antages och är noll. Långt borta från origo avtager exponential-faktorn så snabbt att hela funktionen går mot noll då $x^2 + y^2$ går mot oändligheten. Därför måste f antaga ett största värde. Med $r^2 = x^2 + y^2$ kan vi skriva gradienten

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{r} - \frac{x}{4}r \;,\; \frac{y}{r} - \frac{y}{9}r \right) \exp(..., ...),$$

som blir noll, endast då $x(4 - r^2) = 0$ samtidigt som $y(9 - r^2) = 0$, vilket endast ger de intressanta punkterna (obs. att fallet $x = 0 = y$ är uteslutet här) $x = 0, y = \pm 3$ (vilket ger max), och/eller $y = 0, x = \pm 2$.

6. Skriv $g = 3x^2 + 4y^2 - 5xy$. Kurvan $K : g = 7$ har normal $N(x, y) = \text{grad}\, g = (6x - 5y, -5x + 8y)$ och den givna DE visar att grad f överallt är parallell med N. Om man nu t ex lokalt löser ut x implicit längs K som en funktion av y eller vice versa, och sedan deriverar antingen $f(x(y), y)$ längs K m a p y, eller $f(x, y(x))$ längs K m a p x, så finner man att denna derivata blir noll. Det betyder att f måste vara konstant (lokalt) längs K.

7. Låt kojans längd längs vggen ges av koordinaten x, bredden av y samt höjden av z. Volymen blir då $V = V(x, y, z) = xyz$, medan kojans area blir
$A = A(x, y, z) = xz + xy + 2yz$. Vi är **inte** intresserade av fallet $V = 0$. Lagranges multiplikatormetod ger oss kravet $\text{grad}\, V = \lambda\, \text{grad}\, A$, där vi lätt eliminerar själva multiplikatorn λ (proportionalitetsfaktorn mellan tvenne parallella vektorer) och får kravet $\text{grad}\, V \times \text{grad}\, A = \mathbf{0}$, varur efter stegvisa förenklingar kryper fram att $y = z$, $x = 2y = 2z$. Bredden och höjden skall alltså vara lika med längden dubbelt så stor.

Genom att spegla i både väggen och i golvet kan man med symmetriresonemang komma fram till att den dubbelt speglade kojan bör bli en kub, varför själva kojan bör ha formen av en kvartskub.

8. Tetraedern T ges bl a av att $x/a + y/b + z/c < 1$, varför

$$\operatorname{vol} T = \int_0^c dz \int_0^{b(1- z/c)} dy \int_0^{a(1- y/b\ z/c)} dx \ .$$

9. Skriv det givna sambandet mellan x och y på formen $G(x,y) = 0$ och beräkna gradienten av G i origo. Eftersom nu $\partial G/\partial x$ är nollskild i origo, så kan man enligt implicita funktionsssatsen lokalt nära origo lösa ut x som funktion av y.

10. Av symmetriskäl har de tre olika funktionerna f, g och h *samma* medelvärde M över enhetsklotet K, och talet $3M$ beräknas lätt i sfäriska polära koordinater genom att $3M \operatorname{vol} K =$

$$= \iiint_K f + g + h\ dV = \iiint_K r^2\, dx\, dy\, dz = \cdots = 4\pi \int_0^1 r^2\, r^2\, dr = \cdots = 4\pi/5,$$

varav $M = \dfrac{4\pi/15}{4\pi/3} = 1/5.$

11. Variabelbytet $u = x + y \ , v = -x + y$ med det nya integrationsområdet $Q : u+v > 0 \, , u-v > 0$, och med Jacobideterminant $\dfrac{d(u,v)}{d(x,y)} = 2$ ger $du\, dv = 2\, dx\, dy$ och den nya integralen

$$I = \iint_Q \frac{1}{1+u^4}\, du\, dv/2 = \int_0^\infty du \int_{-u}^{u} \frac{1}{1+u^4}\, dv/2 = \int_0^\infty \frac{u}{1+u^4}\, du.$$

Variabeln $w = u^2$ med $2u\, du = dw$ ger nu $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dw}{1+w^2}\ /2 = \pi/4.$

12. Komplettera parabelbågen γ med det raka linjesegmentet mellan bågens ändpunkter för att få en sluten kontur $\partial\Omega$ kring det nu inneslutna området Ω. Greens sats kan användas. Om integralen längs $\partial\Omega$ skrivs $\int_{\partial\Omega} P\, dx + Q\, dy$, så blir $\partial Q/\partial y - \partial P/\partial x = 3$ i *hela* området Ω, och kurvintegralen längs det raka segmentet blir

$$\int_{-2}^{2} \mathrm{e}^{\,(x^2-1)}\, 2x + 0 + 2\ dx = 8.$$

Området Ω har area $32/3$. Man får 3 gånger arean minus 8, dvs $32 - 8 = 24$.

13. Gradienten $\operatorname{grad} f = \Big(4x(1-x^2) \, , \, 4y(1-y^2) \Big)$ är noll i de nio punkter, där variablerna x och y antager något av de tre värdena $0 \, , \pm 1$. Med andraderivatorna $f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4(1-3x^2)$, $f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4(1-3y^2)$, $f_{xy} = 0$, finner man att

$\cup$ origo $(0,0)$ är en lokal minimipunkt,

$\asymp$ de fyra punkterna $4P : (\pm 1, 0)$ och $(0, \pm 1)$ alla är sadelpunkter, samt att

$\cap$ den intressanta kvadratens fyra hörn $(\pm 1, \pm 1)$ samtliga är lokala (och globala) maximipunkter.

Då vattnet fylls på bildas alltså en liten sjö kring origo. Dess vattendjup växer till $1 = f(\pm 1, 0) = f(0, \pm 1)$ och den börjar svämma över vid de fyra punkterna $4P$, som ligger mitt på kvadratens sidor. Ekvationen för strandlinjen blir $1 = f(x, y)$.

14. Gauss' sats ger flödet $\Phi = \iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV =$

$= \iiint_K 4 - x^2 - y^2 - 4z^2\, dx\, dy\, dz$, där K är den kropp, som innesluts av ytan Y. Integralen blir maximal, om vi väljer K som rotationsellipsoiden $K : x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 4$. Variabelbytet $2z = w$ (vi behåller x och y) ger det nya integrationsområdet $Q : x^2 + y^2 + w^2 \leq 4$, dvs ett klot med radie 2. Med polära koordinater, där $r^2 = x^2 + y^2 + w^2$, fås

$$\Phi = \iiint_Q 4 - x^2 - y^2 - w^2\, dx\, dy\, dw/2 = \cdots = \frac{1}{2} 4\pi \int_o^2 (4 - r^2)\, r^2\, dr =$$

$$= \cdots = 128\pi/15.$$

15. Enklast är nog att gå över till polära koordinater $x = r\cos\theta = r\,c$, $y = r\sin\theta = r\,s$, för att få kurvans ekvation $r^2 c^4 = c^2 - 3\,s^2$. Eftersom $r^2 \geq 0$ ser vi att r blir noll då $c^2 - 3\,s^2 = 0$, eller då $\tan\theta = \pm 1/\sqrt{3}$, dvs då θ antager något av värdena $\pm 30^0$, $\pm 150^0$, vilket lätt ger att hela kurvan ligger inom vinkelsektorerna $|\theta - k\,\pi| \leq \pi/6$, där k är ett heltal. Man kan nu övertyga sig om kurvan är en liggande åtta med dubbelpunkt i origo.

En gren av kurvan ges av $y = g(x) = x\sqrt{(1 - x^2)/3}$, där $-1 \leq x \leq 1$. Denna gren ser ut som ett liggande stort S och i origo har denna gren lutningskoefficienten $k_1 = g'(0) = 1/\sqrt{3}$ med lutningsvinkeln 30^0.

Den andra grenen av åttan ges av ekvationen $y = -g(x)$ med lutningsvinkeln minus trettio grader.

Vinkeln mellan dessa båda grenar blir nu sextio grader.

16. Skriv integralen på formen $I = I_\gamma = \int_\gamma P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$ med

$P = \mathrm{e}^{-(x^2 + y^2)}(1 - x^2 + y^2)\, 2x$ och $Q = \mathrm{e}^{-(x^2 + y^2)}(-1)(1 + x^2 - y^2)\, 2y$.

Eftersom $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ i hela planet, så finns en global potential $U = U(x, y)$. Den måste uppfylla $Q = \partial U/\partial y$, varav (med en partiell integration)

$$Q(x, y) = \int -(1 + x^2)\{2y\,\mathrm{e}^{-(x^2 + y^2)}\}\, dy + \int y^2\{2y\,\mathrm{e}^{-(x^2 + y^2)}\}\, dy =$$

$$= (1 + x^2)\,\mathrm{e}^{-(x^2 + y^2)} - y^2\,\mathrm{e}^{-(x^2 + y^2)} + \int 2y\,\mathrm{e}^{-(x^2 + y^2)}\, dy =$$

$$= (1 + x^2)\,\mathrm{e}^{-(x^2 + y^2)} - y^2\,\mathrm{e}^{-(x^2 + y^2)} - \mathrm{e}^{-(x^2 + y^2)} + G(x) =$$

$$= (x^2 - y^2)\,\mathrm{e}^{-(x^2 + y^2)} + G(x),$$

där $G(x)$ är en godtycklig funktion av x ("integrationskonstanten").

Nu ger sambandet $P = \partial U/\partial x$ att $G(x)$ måste vara konstant, säg $G = 0$.

Om kurvan γ går från punkten A till punkten B kan vi nu skriva

$I_\gamma = \int_\gamma \frac{\partial U}{\partial x}\, dx + \frac{\partial U}{\partial y}\, dy = \int_\gamma dU = U(B) - U(A)$. Integralen I_γ når sitt största värde då A väljs som en av de två absoluta minimipunkterna $(0, \pm 1)$ för U, medan B väljs som en av maximipunkterna $(\pm 1, 0)$.