Matematik, KTH ; JA

Inlämningsuppgift nr 1 SF1603 FlerVariabelAnalys

lämnas in SENAST tisdag 22 april 2014 klo 24.00.

Läs noggrant igenom denna ingress. Ni får samarbeta HÖGST två och två. Om Du har samarbetat med någon MÅSTE Du skriva dess namn längst upp på första sidan. Glöm ej skriva tydliga namn och personnummer. Alla införda beteckningar skall förklaras. Alla resonemang skall kunna följas. Varje teknolog skall häfta ihop sina papper. Inga lösa papper emottages. Allt skall skrivas för hand; inga datorutskrifter accepteras. Inga inscannade datorfiler emottages. [Två tillägg nedan i slutet av 2 b). Plus En rättelse på näst sista raden, sidan 2.]

1. Harmoniska funktioner i planet.

a) Här skall vi först beräkna Laplaceoperatorn i planet (i två variabler).
Låt $g(x,y) = U(r,\theta)$ vara samma funktion i kartesiska koordinater (x,y) och i (plana) polära koordinater (r,θ). Beräkna medelst kedjeregeln (KR) först $g'_x = \dfrac{\partial g}{\partial x}$ uttryckt i termer av $U'_r = \dfrac{\partial U}{\partial r}$ och $U'_\theta = \dfrac{\partial U}{\partial \theta}$ och därefter $g''_{xx} = g_{xx}'' = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ explicit uttryckt som **första**- och andraderivator av U. Gör därefter samma sak med g'_y och g''_{yy}. Avsluta med att addera g''_{xx} och g''_{yy} för att få önskat uttryck i polära koordinater. Själva Laplaceoperatorn är differentialoperatorn
$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, som Du nu skall ha fått fram i polära koordinater. Observera att symbolen stora Delta (Δ) här används **i en helt annan mening** än som differens-operator [där då Δx står för $(x + h) - x$].

b) Lösningar till Laplaces ekvation kallas *harmoniska funktioner*. Vi skall nu söka de allra enklaste lösningarna till Laplaces ekvation $\Delta g = 0$ i polära koordinater. Vi skall använda metoden med variabelseparation och söka s k produktlösningar på formen $g(x,y) = U(r,\theta) = R(r)\,\Theta(\theta)$. I vinkelled är det bara rimligt med **periodiska** funktioner Θ av vinkelvariabeln θ, om de skall vara betydelsefulla och entydiga då vi låter vinkeln växa med 2π. Detta krav lyder
$\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$, för alla θ. $(*)$
Om man sätter in ansatsen $U = R\,\Theta$ i Laplaces ekvation ser man att det är ändamålsenligt att endast söka lösningar i θ-led, som uppfyller den *ordinära* differentialekvationen (ODE) $\Theta'' + k\,\Theta = 0$, där k kallas en separationskonstant. Visa nu att kravet $(*)$ leder till att det reella talet k måste vara kvadraten på ett ickenegativt heltal. (OBS: ickenegativ betyder ICKE samma sak som positiv!) Skriv upp de lösningar Du funnit i θ-led för dessa k-värden.

c) Visa att den resterande ODE för R-funktionen nu reducerats till
$R'' + \dfrac{1}{r}R' - \dfrac{k}{r^2}R = 0$.
Nästan alla lösningar till denna Eulers differentialekvation kan sökas på formen $R = r^{\ell}$, där konstanten ℓ måste bestämmas. (Med denna ansats får man en karakteristisk ekvation. Om denna ekvation har en dubbelrot måste man också söka en lösning på formen $R = r^{\ell}\log r$, där log kan vara vilken logaritm som helst.) Men om vi bara söker lösningar till de k-värden, som fastställdes i del b) ovan och som är kontinuerliga för *alla* förekommande r-värden, $0 \le r < \infty$, så är denna ansats (utan logaritm) tillfyllest. Sök nu till **varje** separat k-värde de motsvarande R-funktionerna.

d) Para slutligen ihop de erhållna R-funktionerna med sina Θ-funktioner. Visa att dessa produktlösningar kan skrivas som **polynom** i ursprungsvariablerna x och y. (Utför detta åtminstone för de fyra minsta k-värdena.) Detta är de (kanoniska) harmoniska polynomen. Kontrollera att de är homogena polynom, dvs att den sammanlagda potensen $\alpha + \beta$, för varje term av typ $x^\alpha y^\beta$ i ett av dessa polynom, är konstant.

2. Harmoniska funktioner i rummet. Obs. Sambanden mellan gamla och nya koordinater kan avläsas nedan direkt under ordet Exempel.
Om man konsekvent genomför en liknande variabelseparation för Laplaces ekvation $\Delta\, h(x, y, z) = 0$ i tre (rums)variabler med avseende på sfäriska polära koordinater (r, θ, ϕ), så får man produktlösningar på formen $h = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\phi)$, där man sedan får $R(r) = r^n$, $n =$ heltal ≥ 0, $\Theta(\theta) =$ ett polynom i $\cos\theta$ och $\sin\theta$, samt $\Phi =$ ett polynom i $\cos\phi$ och $\sin\phi$.
Restriktionen (inskränkningen) av en slik produktlösning $h = R\,\Theta\,\Phi$, (där "R-delen" utgörs av $R(r) = r^n$, $n \geq 0$) till enhetssfären $r = 1$ kallas en klotytefunktion (sfärisk funktion) $\Theta(\theta)\,\Phi(\phi)$, Från den kan man återskapa den ursprungliga harmoniska funktionen h, helt enkelt genom att multiplicera med *rätt* r-potens r^n. Exempel:

Klotytefunktion	Rätt r-potens	Harmoniskt polynom
1	noll	1
$\sin\theta\, \cos\phi$	ett	$x = r\, \sin\theta\, \cos\phi$
$\sin\theta\, \sin\phi$	ett	$y = r\, \sin\theta\, \sin\phi$
$\cos\theta$	ett	$z = r\, \cos\theta$

Uppgiften består i att fortsätta denna tabell genom att till varje nedan angiven klotytefunktion finna *korrekt* positiv r-potens, och sedan skriva om produktfunktionen $h = R\,\Theta\,\Phi$ som ett polynom i de kartesiska variablerna x, y, z, samt att *kontrollera* att alla dessa polynom verkligen uppfyller Laplaces ekvation.

Här är nu klotytefunktionerna:

$3\cos^2\theta - 1$,

$\cos\theta\, \sin\theta\, \cos\phi$,

$\cos\theta\, \sin\theta\, \sin\phi$,

$\sin^2\theta\, \cos(2\phi) = ...$

$\sin^2\theta\, \sin(2\phi) = ...$

$5\cos^3\theta - 3\cos\theta$,

... ...

$5\sin^3\theta\, \cos 3\phi = ...$

$5\sin^3\theta\, \sin 3\phi = ...$

Lycka till! Kontakta föreläsaren om tryckfel upptäcks.