Matematik, KTH ; JA

Inlämningsuppgift nr 2   SF1603   FlerVariabelAnalys

lämnas in SENAST onsdag 21 maj 2014 klo 24.00.

Läs noggrant igenom denna ingress. Ni får samarbeta HÖGST två och två. Om Du har samarbetat med någon *MÅSTE* Du skriva dess namn längst upp på första sidan. Glöm ej skriva tydliga namn och personnummer. Alla införda beteckningar skall förklaras. Alla resonemang skall kunna följas. Varje teknolog skall häfta ihop sina papper. Inga lösa papper emottages. Allt skall skrivas för hand; inga datorutskrifter accepteras. Inga inscannade datorfiler emottages. Alla inlämnade papper skall ha SPIKRAKA kanter, precis såsom normala rektangulära A4-papper.

Isaac Newtons allmänna gravitationslag säger att de attraktiva krafterna mellan två punktformiga massor m_1 och m_2 på avstånd R_{12} från varandra har storleken

(G) $\quad F = \dfrac{G\, m_1\, m_2}{R_{12}^2}$ och är riktade mot den andra kroppen.

1. Skriv upp kraftfältet (vektorfältet, vf) som verkar på testmassan m_2 i rummet om vi tänker oss att den ena massan $m_1 = M$ ligger fix i origo och den andra massan $m_2 = \mu$ ligger på avstånd r från origo. Här är r absolutbeloppet av radius vector $\mathbf{r}$, som har de kartesiska komponenterna (x, y, z). Tänk speciellt på fältets riktning.

Beräkna en (fysikalisk) potential, som en funktion av r eller $\mathbf{r}$, för detta vf. Det betyder att kraften skall vara minus gradienten av potentialen.

2. Vi skall nu beräkna den kraft som ett homogent sfäriskt skal S utövar på en testpartikel. Låt skalet (sfären) ha radie R med centrum i origo och masstäthet σ [med sort t ex kg per kvadratmeter]. Låt testpartikeln ha massa μ och ligga på avstånd r från origo. Här har vi ett val: man kan försöka beräkna denna kraft direkt från (G) eller också via potentialen. Skriv nu upp en (Riemann)summa för en av följande två storheter: (Den totala) kraften $F(\mathbf{r})$ eller för (gravitations)potentialen $U(\mathbf{r})$ i punkten $\mathbf{r}$. [Sfären har ekvation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.]

Skriv därefter upp motsvarande dubbelintegral (över hela sfären S) som ger antingen kraften direkt eller potentialen.

Evaluera (utvärdera, beräkna) direkt en av dessa integraler. **Ledtråd:** Välj en position (på avstånd r från origo) för testpartkeln, som är så enkel som möjligt att beskriva i något av de koordinatsystem, som Du väljer för evalueringen. Observera att Du måste behandla tvenne olika fall, antingen är $r < R$ eller tvärtom. Du behöver inte behandla fallet $r = R$ under evalueringen, ty den luckan kan man fylla i efteråt genom kontinuitet (både kraften och potentialen visar sig bli kontinuerliga funktioner av r i *hela* rummet).

Nu skall Du ha (två olika) explicita uttryck för antingen kraften eller potentialen, ett för fallet $r \le R$ och ett för fallet $r \ge R$ och de skall överensstämma då $r = R$.

Beräkna nu potentialen i hela rummet från uttrycket för kraften, eller tvärtom kraften i hela rummet utgående från potentialen.

Tips: Det visar sig att bokstavskombinationen $G\mu\sigma\dfrac{4\pi}{3}$ dyker upp på flera ställen. Man kan då t ex kalla den $\mathcal{E}$.

Förhoppningsvis har Du nu kommit till Newtons fantastiska resultat: Nettokraften på en testpartikel *utanför* det sfäriska skalet är **precis samma som om** hela skalets massa vore koncentrerad i sfärens centrum, medan en testpartikel *inuti* det sfäriska skalet **inte upplever någon nettokraft alls!**

3. Nu skall vi beräkna nettokraften på en testpartikel från ett homogent tjockt sfäriskt skal eller från ett homogent klot.

Vi tänker oss nu en konstant masstäthet ρ [med sort t ex kg per kubikmeter], som den attraherande kroppen har för alla punkter på avståndet R från origo, där nu $0 \leq a \leq R \leq b < \infty$. Fallet $0 = a$ betyder att kroppen är ett homogent klot med radie b. Fallet $0 < a$ betyder att vi har ett homogent tjockt sfäriskt skal med innerradie a och ytterradie b. (Då a går mot b och ρ långsamt går mot ∞, kan vi återfå det sfäriska skalet.)

Vi skall nu beräkna kraftfältet i hela rummet, som denna kropp genererar. Det är enklast att tänka sig detta tjocka sfäriska skal såsom uppbyggt av florstunna sfärer, alla med olika radie. Låt nu testpartikeln ligga på avstånd $r > 0$ från origo. Här kan det vara enklast att resonera som så:

Alla (florstunna) sfärer, som ligger *innanför* testpartikeln, attraherar testpartikeln med en kraft, som har storlek proportionell mot den florstunna sfärens massa och mot $1/r^2$.

Ingen av de (florstunna) sfärer, som ligger *utanför* testpartikeln, påverkar testpartikeln med någon kraft alls.

Observera att om $0 < a$, så får vi tre olika fall för radien r, medan det bara blir två olika fall om vi har satt $0 = a$.

Försök nu beräkna potentialen för testpartikeln för alla olika r-värden.

Sätt nu $a = 0$, om Du inte redan gjort det.

Förhoppningsvis har Du nu kommit till detta resultat: Nettokraften på en testpartikel *utanför* klotet är **precis samma som om** hela klotets massa vore koncentrerad i dess centrum, medan en testpartikel någonstans *inuti* klotet, på avstånd $r \leq b$ från klotets centrum, upplever en kraft, som är **proportionell** mot avståndet r till centrum. Det betyder att kraftfältet utanför klotet lyder under Newtons lag, medan kraftfältet inuti klotet (tänk på testpartikeln inuti klotet som en liten neutriono, som kan röra sig ganska fritt utan att kollidera med klotets egna atomer) lyder Hookes lag. Hooke grälade mycket med Newton om dessa olika kraftlagar.

4. Beräkna både divergensen och rotationen för det centrala (radiala) vektorfältet
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}\, r^{k-1} = \widehat{\mathbf{r}}\, r^k$, där k är ett godtyckligt reellt tal, eller ett heltal.
Är det något speciellt med k-värdena -2 och/eller $+1$?

Lycka till! Kontakta föreläsaren om tryckfel upptäcks.