KTH Matematik

Kompletteringskompendium

Tomas Ekholm
Institutionen för Matematik
Kungliga Tekniska Högskolan

Stockholm 11 augusti 2003

1 Induktion

1.1 Notation och inledande logik

Vi börjar med att införa beteckningar för några mängder av tal. De naturliga talen är $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, heltalen är $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ och bråken eller de rationella talen är $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$. Det senare uläses "Mängden av alla $\frac{a}{b}$ sådana att a och b är heltal och $b \neq 0$". Vi kommer även att behöva mängden $\mathbb{R}$ som är de reella talen. Vi kan inte enkelt definiera denna mängd utan vi får i detta läget se den som mängden av alla tal på tallinjen. Låt A vara en mängd. Om ett element x tillhör mängden A skriver vi $x \in A$, annars $x \notin A$.

Exempel 1.1. Vi har att $34 \in \mathbb{N}$, men $-3 \notin \mathbb{N}$. Det gäller även att $-4 \in \mathbb{Z}$ och $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$. ▲

Låt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vara n stycken tal. Vi inför följande notation för summa och produkt:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

och

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Exempel 1.2.

$$\sum_{k=1}^{3} (k+1)^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 = 4 + 9 + 16 = 29.$$

▲

Matematisk bevisföring bygger på följande logiska definitioner. Låt A och B vara två utsagor. Vi definierar att

- $(A$ och $B)$ är sann om A är sann och B är sann, annars falsk.
- $(A$ eller $B)$ är falsk om A är falsk och B är falsk, annars sann.
- $(A$ medför $B)$ är falsk om A är sann och B är falsk, annars sann. Påståendet A medför B kan skrivas med hjälp av symbolen $\Rightarrow$ som $A \Rightarrow B$.
- $(A$ om och endast om $B)$ är sann om både $(A$ medför $B)$ och $(B$ medför $A)$ är sanna, annars falsk. Påståendet A om och endast om B kan skrivas med hjälp av symbolen $\Leftrightarrow$ som $A \Leftrightarrow B$.

Exempel 1.3. Det som kan orsaka lite problem är det faktum att utsagan (A medför B) alltid är sann då A är falsk. Exempelvis är följande en sann utsaga: *Om vatten fryser vid 10° C finns det inget vatten.* ▲

En motivering till vår definition av (A medför B) utgörs av följande exempel.

Exempel 1.4. Låt utsagan A vara *"Kalle har rånat kiosken"* och utsagan B vara *"kiosken har blivit rånad"*. Utsagan (A medför B) betyder att *"Om Kalle har rånat kiosken har kiosken blivit rånad"*.

Enligt definitionen är (A medför B) falsk om A är sann och B är falsk. Detta känns rätt eftersom *"Om Kalle har rånat kiosken har kiosken blivit rånad"* tillsammans med att *"Kalle har rånat kiosken"* och *"kiosken har ej blivit rånad"* verkar orimligt.

Antag nu att det var Stina och inte Kalle som hade rånat kiosken. Det är rimligt att fortfarande låta det vara sant att (A medför B), d.v.s. *"Om Kalle har rånat kiosken har kiosken blivit rånad"*.

Antag nu att ingen har rånat kiosken. Fortfarande känns det korrekt att (A medför B), d.v.s. *"Kalle har rånat kiosken medför att kiosken har blivit rånad"*, är sant. ▲

1.2 Induktion

Före beskrivningen av induktionsprincipen studerar vi ett exempel. Låt oss försöka bevisa att för varje heltal $n \geq 1$ gäller att

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$$

Det är enkelt att se att om $n = 1$ får vi $VL = HL = 1$, om $n = 2$ får vi $VL = HL = 5$, om $n = 3$ får vi... . Eftersom n kan vara vilket heltal som helst större än 0 är denna metod dömd att misslyckas. Vi måste hitta något annat angreppssätt.

Antag att det för ett givet n stämmer att

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$$

Låt oss undersöka om likheten då gäller för nästkommande heltal, d.v.s. vi vill undersöka om det är sant att

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{2(n+1)^3 + 3(n+1)^2 + (n+1)}{6}.$$

Ett sätt att angripa detta är att försöka använda vårt antagande. Vi observerar att

$$VL = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2$$

och vi kan nu använda vårt antagande:

$$\begin{aligned} VL &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{2n^3+3n^2+n+6n^2+12n+6}{6} = \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}. \end{aligned}$$

Det återstår att visa att detta sammanfaller med högerledet.

$$\begin{aligned} HL &= \frac{2(n+1)^3+3(n+1)^2+(n+1)}{6} \\ &= \frac{2(n^3+3n^2+3n+1)+3(n^2+2n+1)+n+1}{6} \\ &= \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6} = VL. \end{aligned}$$

Det fungerade. Vi har nu visat att om likheten gäller för något fixt värde n, så gäller den också för nästkommande värde, d.v.s. $n+1$.

Vi vet att likheten stämmer för $n = 1$ och därmed för $n = 2$. Eftersom likheten nu gäller för $n = 2$ har vi att den gäller för $n = 3$. Eftersom likheten nu gäller för $n = 3$ har vi att den gäller för $n = 4$ .... På detta sätt kan vi fortsätta i all oändlighet. Detta visar att om n är ett heltal större än 0 har vi identiteten

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}.$$

Vi är nu redo att presentera induktionsprincipen formellt.

Lemma 1.5 (Induktionsprincipen). *Låt $P(n)$ vara ett påstående vars sanningsvärde beror av heltalet $n \geq n_0$, där $n_0 \in \mathbb{Z}$. Antag att*

(a) $P(n_0)$ är sann,

(b) Implikationen $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ är sann för alla $n \geq n_0$.

Då är $P(n)$ sann för alla heltal $n \geq n_0$.

Del *(a)* i induktionsprincipen kallas basfall och *(b)* kallas induktionssteg. Ett bevis där induktionsprincipen används kallas ett induktionsbevis. Låt oss studera fler exempel.

Exempel 1.6. Visa att $3^n > n^3$ för alla $n \geq 4$.
LÖSNING: Vi nyttjar förstås induktion.

(a) Vi studerar först startvärdet. Då $n = 4$ har vi $VL = 3^4 = 81$ och $HL = 4^3 = 64$. Vi har att $VL > HL$.

(b) Antag att det för ett givet $n \geq 4$ gäller att $3^n > n^3$. Vi vill visa att $3^{n+1} > (n+1)^3$, vilket är detsamma som att visa att $3^{n+1} - (n+1)^3 > 0$. Vi försöker återföra problemet till vårt antagande som är att $3^n > n^3$. Det är viktigt att tänka på att det minsta värde som n kan anta är 4. Detta ger t.ex. att $2n^3 = 2n \cdot n^2 \geq 8n^2$.

$$\begin{aligned} 3^{n+1} - (n+1)^3 &= 3 \cdot 3^n - (n+1)^3 > 3 \cdot n^3 - (n+1)^3 = \\ &= 2n^3 - 3n^2 - 3n - 1 \geq 8n^2 - 3n^2 - 3n - 1 = \\ &= 5n^2 - 3n - 1 \geq 20n - 3n - 1 = 17n - 1 > 0. \end{aligned}$$

Vi har visat de två stegen i induktionsprincipen, vilket ger oss att $3^n > n^3$ för alla heltal $n \geq 4$. ▲

Definition 1.7. Låt $a, b \in \mathbb{Z}$. Heltalet a är **delbart med** b om det existerar ett heltal c sådant att $a = b \cdot c$.

Exempel 1.8.

(a) 18 är delbart med 6 ty $18 = 6 \cdot 3$.

(b) 7 är ej delbart med 2, eftersom det inte existerar något heltal c sådant att $7 = 2c$.

▲

Exempel 1.9. Visa att $3^{2n+1} + 4 \cdot 2^n$ är delbart med 7 för alla $n \in \mathbb{N}$.
LÖSNING: Induktionsbeviset lyder:

(a) För $n = 0$ får vi $3^1 + 4 \cdot 2^0 = 7$, vilket är delbart med 7.

(b) Antag att det för ett givet $n \in \mathbb{N}$ gäller att $3^{2n+1} + 4 \cdot 2^n$ är delbart med 7, d.v.s. att
$$3^{2n+1} + 4 \cdot 2^n = 7c$$
för något $c \in \mathbb{Z}$.
Vi vill visa att $3^{2(n+1)+1} + 4 \cdot 2^{n+1} = 3^{2n+3} + 4 \cdot 2^{n+1}$ är delbart med 7, d.v.s. att $3^{2n+3} + 4 \cdot 2^{n+1} = 7d$ för något $d \in \mathbb{Z}$. Som vanligt måste vi använda oss av antagandet.

$$\begin{aligned} 3^{2n+3} + 4 \cdot 2^{n+1} &= 9 \cdot 3^{2n+1} + 8 \cdot 2^n \\ &= 7 \cdot 3^{2n+1} + 2\left(3^{2n+1} + 4 \cdot 2^n\right) \\ &= 7 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 7c \\ &= 7\left(3^{2n+1} + 2c\right) \end{aligned}$$

Eftersom $d = 3^{2n+1} + 2c \in \mathbb{Z}$ har vi visat att påståendet är sant för nästkommande heltal.

Alltså är $3^{2n+1} + 4 \cdot 2^n$ delbart med 7 för alla $n \in \mathbb{N}$. ▲

1.3 Övningar

1.1. Visa att för alla heltal $n \geq 1$ gäller likheten

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1.2. Låt $P(n)$ vara påståendet

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(2n+1)^2}{8}.$$

Visa att om $P(n)$ är sant för något n är $P(n+1)$ sant. Visa även att $P(n)$ alltid är falskt.

1.3. Låt x vara ett reellt tal med $x \neq 1$. Använd induktion för att visa att

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

1.4. Visa att summan av de n första udda naturliga talen är n^2 och att summan av deras kvadrater är

$$\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

1.5. Visa med induktion att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1},$$

och att

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2n}.$$

1.6. Visa att $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ är delbart med 9 för alla $n \in \mathbb{N}$.

1.7. Visa att $(n-1)^3 + (n+1)^3$ är delbart med 4 för alla $n \in \mathbb{N}$.

1.8. Visa att för varje heltal $n \geq 1$ gäller formeln

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)(k+5) = \frac{n(2n+7)(n+7)}{6}.$$

1.9. Visa att för varje heltal $n \geq 1$ är

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

1.10. Visa att för varje heltal $n \geq 1$ gäller att

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

1.11. Låt oss definiera $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Visa att för varje heltal $n \geq 1$ gäller att

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \leq 2^{2n-1}.$$

1.12. Visa att $2^n \geq n^2$ för alla heltal $n \geq 4$.

1.13. Visa att för alla heltal $n \geq 1$ gäller att

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

1.14. Låt p vara ett reellt tal sådant att $p > -1$. Visa att

$$(1+p)^n \geq 1 + np$$

för alla $n \in \mathbb{N}$.

1.15. Visa att $3^{2n} - 1$ är delbart med 8 för alla heltal $n \geq 0$.

1.16. Visa att för alla heltal $n \geq 4$ gäller att $3^n > 2^n + 4n^2$.

1.17. Visa att $2^n + 3^n < 4^n$ för alla heltal $n \geq 2$.

1.18. Visa att $n^n 2^{-n} > n!$ för alla heltal $n \geq 6$. (Ledning: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ är en växande talföljd.)

2 Komplexa tal

2.1 Rektangulära koordinater

I detta kapitel kommer vi att studera ordnade par av typen (a, b) där a och b är reella tal. Att paret är ordnat betyder att för $a \neq b$ gäller att (a, b) inte är detsamma som (b, a).

Definition 2.1. Ett komplext tal z är ett ordnat par av reella tal, $z = (a, b)$, där $a, b \in \mathbb{R}$. Addition och multiplikation av två komplexa tal $z_1 = (a_1, b_1)$ och $z_2 = (a_2, b_2)$ definieras genom

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2), & (1) \\ z_1 \cdot z_2 &= (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1). & (2) \end{aligned}$$

Likhet definieras genom att $z_1 = z_2$ om och endast om $a_1 = a_2$ och $b_1 = b_2$. Mängden av alla komplexa tal betecknas $\mathbb{C}$.

Exempel 2.2. Låt $z_1 = (2, -3)$ och $z_2 = (-5, 1)$. Då följer att

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (2, -3) + (-5, 1) = (-3, -2), \\ z_1 \cdot z_2 &= (2, -3) \cdot (-5, 1) = (-10 + 3, 2 + 15) = (-7, 17). \end{aligned}$$

▲

Om $z = (a, b)$ och $c \in \mathbb{R}$ definierar vi

$$c \cdot z = (ca, cb). \tag{3}$$

T.ex. ger fallen $c = -1$ och $c = \frac{1}{2}$ identiteterna

$$\begin{aligned} -z &= (-a, -b), \\ \frac{z}{2} &= \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right). \end{aligned}$$

Tal på formen $(a, 0)$ kan identifieras med de reella talen. Om $z_1 = (a_1, 0)$ och $z_2 = (a_2, 0)$ ser vi att $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, 0)$ och $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2, 0)$, vilket sammanfaller med addition och multiplikation för reella tal. Ett reellt tal a identifierar vi med det komplexa talet $z = (a, 0)$. Vi ser att för reella tal sammanfaller de båda definitionerna (2) och (3) för multiplikation.

Ekvationen $x^2 + 1 = 0$ saknar lösning i mängden av reella tal, ty $x^2 + 1 \geq 0$ för alla reella tal x. Om vi låter x anta komplexa värden finner vi emellertid lösningar. Låt $x = (0, 1)$. Då är $x^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$, som vi identifierar med det reella talet -1.

Det finns ett praktiskt skrivsätt för att behandla komplexa tal. Ett godtyckligt komplext tal (a, b) kan skrivas om till följande form

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0).$$

Om vi nu identifierar $(a, 0)$ med a och $(b, 0)$ med b får vi det komplexa talet $a + (0, 1) \cdot b$.

Definition 2.3. Låt i vara det komplexa talet $(0,1)$. Talet i kallas den **imaginära enheten**.

Exempel 2.4. Potenser av i har följande förhållanden

$$\begin{aligned} 1 &= i^0 = i^4 = i^8 = \dots, \\ i &= i^5 = i^9 = \dots, \\ -1 &= i^2 = i^6 = \dots, \\ -i &= i^3 = i^7 = \dots. \end{aligned}$$

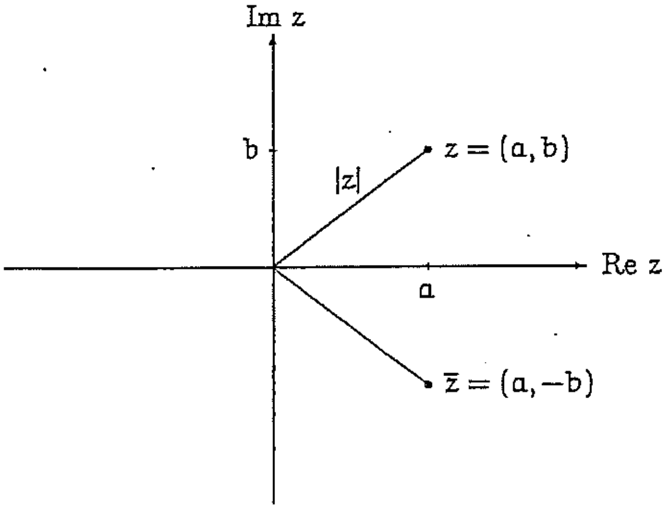
Speciellt viktiga är egenskaperna $i^2 = -1$ och $\frac{1}{i} = -i$. ▲

Med hjälp av den imaginära enheten kan vi identifiera det komplexa talet (a, b) med $a + ib$ och använda de vanliga räknelagarna för addition och multiplikation. För att verifiera detta, låt $z_1 = a_1+ib_1$ och $z_2 = a_2+ib_2$. Addition och multiplikation får som väntat följande utseende:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2), \\ z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 + i^2b_1b_2 \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1). \end{aligned}$$

Låt $z = a+ib$, där $a, b \in \mathbb{R}$ och i är den imaginära enheten. Det reella talet a kallas **realdelen** av z och betecknas $a = \mathrm{Re}\, z$ och det reella talet b kallas **imaginärdelen** av z och betecknas $b = \mathrm{Im}\, z$. Observera att i ej tillhör imaginärdelen. Ett komplext tal på formen $a + ib$ sägs vara på **kartesisk form**.

Definition 2.5. Låt $z = a + ib$ vara ett komplext tal. **Konjugatet** av z är det komplexa talet $\bar{z} = a - ib$. **Absolutbeloppet** av z är det reella talet $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Absolutbeloppet av $z = a + ib$ beskriver avståndet från punkten (a, b) till origo i talplanet. Vi observerar följande likhet

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

Denna likhet,

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} \tag{4}$$

drar vi nytta av då vi inför division av två komplexa tal z_1 och z_2 med $z_2 \neq 0$. Division definieras som högerledet i följande formel

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{1}{|z_2|^2} z_1 \cdot \overline{z_2}.$$

Observera att talet $|z_2|^{-2}$ är reellt och kan behandlas som (3).

Exempel 2.6. Skriv talet $\frac{1+3i}{2-i}$ på formen $a + ib$.
LÖSNING: Enligt definitionen är

$$\frac{1+3i}{2-i} = \frac{(1+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-1+7i}{5} = -\frac{1}{5} + i\frac{7}{5}.$$

▲

Låt $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Vi har räknelagarna

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \tag{5}$$

$$\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \tag{6}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \tag{7}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \tag{8}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \qquad z_2 \neq 0 \tag{9}$$

$$|z| = |\bar{z}|, \tag{10}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \tag{11}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad z_2 \neq 0 \tag{12}$$

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \tag{13}$$

$$|\operatorname{Im} z| \leq |z|, \tag{14}$$

som följer ganska direkt från definitionerna. Exempelvis följer (6), (12) och

(13) efter ansättningen $z = a + ib$, ty

$$
\begin{aligned}
\frac{z - \bar{z}}{2i} &= \frac{a + ib - (a - ib)}{2i} = \frac{2ib}{2i} = b = \operatorname{Im} z, \\
\left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \left|\frac{1}{|z_2|^2} z_1 \cdot \overline{z_2}\right| = \frac{1}{|z_2|^2} |z_1 \cdot \overline{z_2}| = \frac{1}{|z_2|^2} |z_1| |\overline{z_2}| \\
&= \frac{1}{|z_2|^2} |z_1||z_2| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \\
|\operatorname{Re} z| &= |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.
\end{aligned}
$$

Observera att i beviset av (12) har vi använt oss av (10) och (11).

Sats 2.7 (Triangelolikheten). *Låt z_1 och z_2 vara komplexa tal. Då följer att*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \tag{15}$$

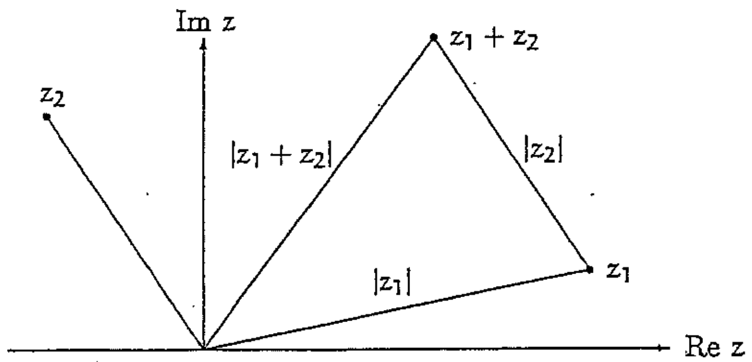
BEVIS: Vi visar olikheten kvadrerad,

$$
\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\,\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)\,(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\
&= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} + |z_2|^2 \\
&= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}\,(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2\,|\operatorname{Re}\,(z_1\overline{z_2})| + |z_2|^2 \\
&\leq |z_1|^2 + 2\,|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\,|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 \\
&= (|z_1| + |z_2|)^2.
\end{aligned}
$$

Vi har olikheten

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2.$$

Eftersom $|z_1 + z_2| \geq 0$ och $|z_1| + |z_2| \geq 0$ kan vi dra roten ur höger- och vänsterled och behålla olikheten. ■



Följdsats 2.8. *Låt z_1 och z_2 vara komplexa tal. Då följer att*

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2|. \tag{16}$$

BEVIS: Vi använder oss av triangelolikheten,

$$|z_1| = |z_1 + z_2 - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|,$$

vilket ger

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|.$$

Med samma metod har vi även att

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2|.$$

Dessa två uttryck ger olikheten. ■

2.2 Andragradsekvationer med komplexa koefficienter

Vi börjar med ett exempel då koefficienten framför z är noll.

Exempel 2.9. Lös ekvationen $z^2 = 4 - 3i$.
LÖSNING: Vi söker de komplexa tal z som kvadrerade är $4 - 3i$. Talet z kan skrivas med real- och imaginärdel som $z = a + ib$. Ekvationen blir nu

$$(a + ib)^2 = 4 - 3i \tag{17}$$

eller efter utveckling

$$a^2 - b^2 + i2ab = 4 - 3i.$$

Från definitionen följer att komplexa tal är lika om och endast om real- och imaginärdelarna sammanfaller, vilket ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ 2ab = -3. \end{cases}$$

Lösningarna till ekvationssystemet ger lösningarna till den ursprungliga ekvationen. Vi kan även använda kriteriet att absolutbeloppet av höger och vänsterled måste sammanfalla i ekvation (17):

$$\begin{aligned} |(a + ib)^2| &= |4 - 3i|, \\ |a + ib|^2 &= |4 - 3i|, \\ a^2 + b^2 &= \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5. \end{aligned}$$

Med tillägg av denna ekvation får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ 2ab = -3 \\ a^2 + b^2 = 5. \end{cases}$$

Första och tredje ekvationen ger att $2a^2 = 9$, d.v.s.

$$a = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Andra ekvationen ger (observera teckenförhållandet mellan a och b)

$$b = -\frac{3}{2a} = \mp\frac{3}{2\frac{3}{\sqrt{2}}} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Lösningarna till ekvationen är således

$$\begin{cases} z_1 &= \frac{3-i}{\sqrt{2}} \\ z_2 &= \frac{-3+i}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

▲

Det allmänna fallet kan återföras på vårt exempel ovan.

Exempel 2.10. Lös ekvationen $z^2 - (3+2i)\,z + 5 + i = 0$.

LÖSNING: Vi nyttjar kvadratkomplettering, vilket bygger på att vi vill finna en kvadrat sådan att utveckling av kvadraten ger oss termerna $z^2 - (3+2i)\,z$. Vi ser att

$$\left(z - \frac{3+2i}{2}\right)^2 = z^2 - (3+2i)\,z + \left(\frac{3+2i}{2}\right)^2 = z^2 - (3+2i)\,z + \frac{5+12i}{4}$$

uppfyller kraven. Detta ger identiteten

$$z^2 - (3+2i)\,z = \left(z - \frac{3+2i}{2}\right)^2 - \frac{5+12i}{4}.$$

Vår ursprungliga ekvation blir nu

$$\left(z - \frac{3+2i}{2}\right)^2 - \frac{5+12i}{4} + 5 + i = 0$$

eller enklare

$$\left(z - \frac{3+2i}{2}\right)^2 = -\frac{15}{4} + 2i.$$

Låt nu $w = z - \frac{3+2i}{2}$, vilket ger oss ekvationen

$$w^2 = -\frac{15}{4} + 2i.$$

Härefter kan följa vårt tidigare exempel. Låt $w = a + ib$. Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -\frac{15}{4} \\ 2ab = 2 \\ a^2 + b^2 = \frac{17}{4}, \end{cases}$$

vilket har lösningarna $a = \pm\frac{1}{2}$ och $b = \pm 2$. Lösningarna till vår ursprungliga ekvation blir

$$\begin{cases} z_1 &= \frac{1}{2} + 2i + \frac{3+2i}{2} = 2 + 3i \\ z_2 &= -\frac{1}{2} - 2i + \frac{3+2i}{2} = 1 - i. \end{cases}$$

▲

2.3 Polära koordinater

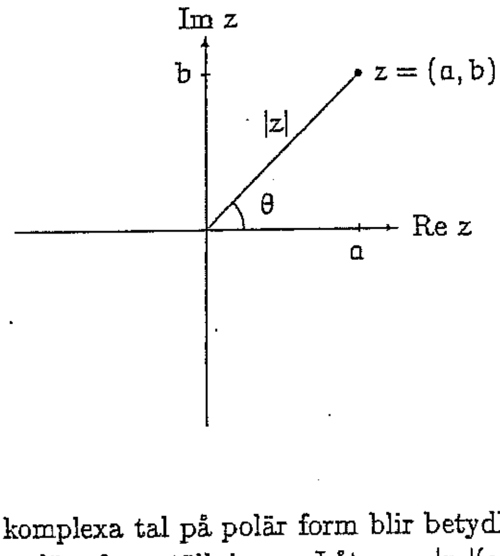
En punkt (a, b) som identifieras med $z = a + ib$ i komplexa talplanet $\mathbb{C}$ kan om $z \neq 0$ beskrivas med hjälp av avståndet $|z|$ till origo och vinkeln θ till den positiva reella axeln, som är mängden av alla komplexa tal av typen $(a, 0)$ med $a \in \mathbb{R}$. Vinkeln θ kallas även **argumentet** av z och betecknas $\theta = \arg z$. Vi har att

$$\begin{aligned} a &= |z| \cos\theta, \\ b &= |z| \sin\theta, \end{aligned}$$

vilket betyder att

$$\begin{aligned} z &= a + ib = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta \\ &= |z|(\cos\theta + i\sin\theta). \end{aligned}$$

Märk att vi till θ kan addera en multipel av 2π och erhålla samma komplexa tal. Argumentet θ är därför bestämt så när som på en multipel av 2π. Ett komplext tal beskrivet på denna form sägs vara på **polär form**.



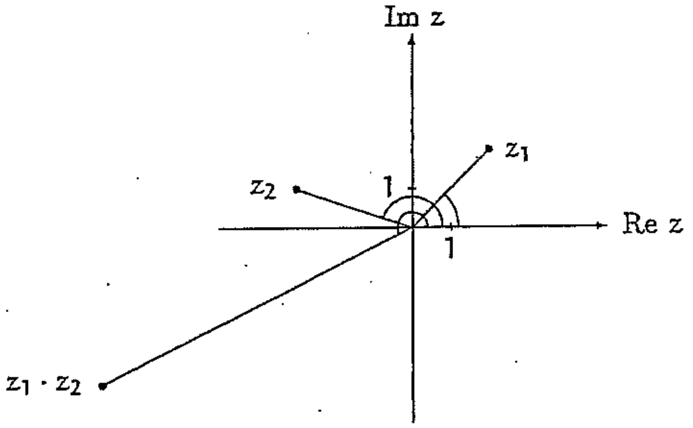
Multiplikation av komplexa tal på polär form blir betydligt enklare att hantera än den rektangulära framställningen. Låt $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

och $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. Med hjälp av additions formler för sinus och cosinus får multiplikation följande utseende

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)|z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\
&= |z_1||z_2|\big(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\\
&\quad + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\big)\\
&= |z_1||z_2|\big(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big),
\end{aligned}$$

och division följer enligt

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{1}{|z_2|^2} z_1 \cdot \overline{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)\\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|}\big(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)\big)\\
&= \frac{|z_1|}{|z_2|}\big(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\big).
\end{aligned}$$



Figur 1: Geometrisk beskrivning av multiplikation.

Exempel 2.11. Låt $z_1 = 2 + 2i$ och $z_2 = 3 + i$. Produkten $z_1 \cdot z_2$ blir då $-8 - 4i$. Multiplikationen visas geometriskt i figur 1, där produktens vinkel är summan av faktorernas vinklar. ▲

Följande definition är praktisk.

Definition 2.12. Låt $\theta \in \mathbb{R}$. Vi definierar $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Enligt ovan är $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$, $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$ och vi har att

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2, \tag{18}$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg z_1 - \arg z_2. \tag{19}$$

Om vi låter $|z_1| = |z_2| = 1$ ger (18)[1]

$$e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

och om $n \in \mathbb{N}$ har vi

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{i\theta} e^{i\theta} \cdots e^{i\theta} = e^{in\theta}. \tag{20}$$

Exempel 2.13. Lös ekvationen $z^n = w$, där $n \in \mathbb{N}$ och $w \in \mathbb{C}$.
LÖSNING: Vi skriver om ekvationen på polär form. Låt $z = |z| e^{i\theta}$ och $w = |w| e^{i\varphi}$. Med hjälp av (20) får vi

$$|z|^n e^{in\theta} = |w| e^{i\varphi}.$$

Vi drar oss till minnes att funktionerna $\sin x$ och $\cos x$ är 2π-periodiska, vilket ger

$$\begin{cases} |z|^n &= |w| \\ n\theta_k &= \varphi + 2\pi k, \end{cases}$$

där $k \in \mathbb{Z}$. Löser vi ut $|z|$ och θ får vi

$$\begin{cases} |z| &= |w|^{\frac{1}{n}} \\ \theta_k &= \frac{\varphi+2\pi k}{n} \end{cases}.$$

Lösningarna till ekvationen blir

$$z_k = |z| e^{i\theta_k} = |w|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi+2\pi k}{n}},$$

där $k \in \mathbb{Z}$. Observera att $k = m$ och $k = m + n$ ger samma lösning. Vi kan därför begränsa k till $0, 1, 2, \ldots, n-1$. ▲

Om vi ersätter θ med $-\theta$ i formeln

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{21}$$

får vi

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta. \tag{22}$$

Detta följer av att $\cos(-\theta) = \cos\theta$ och $\sin(-\theta) = -\sin\theta$. Löser vi ut $\cos\theta$ och $\sin\theta$ får vi **Eulers formler**,

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \tag{23}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \tag{24}$$

[1] Observera att potenslagarna tidigare har varit definierade för reella exponenter. Visst är det skönt att samma lag gäller för komplexa tal.

2.4 Övningar

2.1. Beräkna och förenkla summorna

(a) $5\frac{1+2i}{2} + \frac{i^3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2$,

(b) $\sum_{k=1}^{4} (2i)^k$.

2.2. Låt $z = 1 - 2i$ och $w = 3 - i$. Bestäm

(a) $3z - 2w$,

(b) $z \cdot \overline{2w}$,

(c) $\frac{1}{|z|^2}\frac{\overline{w}}{z}$.

2.3. Bestäm det reella talet a så att

$$\operatorname{Im}\left(\frac{5-i}{3-ia}\right) = 0.$$

2.4. Visa att $|z| = 1$ om och endast om $\overline{z} = \frac{1}{z}$.

2.5. Visa räknelagarna (5) – (14).

2.6. Visa att $|z+4| - 2 \leq |z+2|$ för alla komplexa tal z.

2.7. Lös andragradsekvationerna

(a) $z^2 = -2i$,

(b) $z^2 - 9 - 40i = 0$.

2.8. Lös andragradsekvationerna

(a) $z^2 + (-4+2i)z + 1 - 7i = 0$,

(b) $z^2 - (2+2i)z - 3 + 6i = 0$.

2.9. Bestäm

$$\arg\left(\frac{(2+2i)(1+i\sqrt{3})}{3i(\sqrt{12}-2i)}\right)$$

2.10. Visa att $\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta$.

2.11. Uttryck följande komplexa tal i polär form

(a) i,

(b) $\sqrt{3} - i$,

(c) $\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i}$,

(d) $\left(\cos\frac{1}{2} - i\sin\frac{1}{2}\right)^2$.

2.12. Uttryck följande komplexa tal i rektangulär form

(a) $e^{i\frac{4\pi}{3}}$,

(b) $\frac{1}{(1+i)^3}$,

(c) $\frac{1+2i}{2+i}$,

(d) $e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

2.13. Lös ekvationerna

(a) $z^3 + 1 = 0$,

(b) $z^8 = 16$,

(c) $z^6 = 1 + i$.

2.14. Visa att om $|z| < 1$ och $|w| < 1$ följer att

$$\left|\frac{z - w}{1 - \bar{z}w}\right| < 1$$

3 Polynom och algebraiska ekvationer

3.1 Definitioner och faktorsatsen

En funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ av typen

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n, \qquad (25)$$

där $a_i \in \mathbb{C}$, kallas ett **polynom**. Talen a_i kallas koefficienter till polynomet. Om alla koefficienter är reella kallas polynomet **reellt**, annars **komplext**. Om $a_n \neq 0$ sägs polynomet vara av **gradtal** n och vi skriver $\deg f = n$. Två polynom är lika om och endast om deras respektive koefficienter sammanfaller. Vi kan använda summasymbolen för polynomet (25) och får då

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Exempel 3.1. Låt $f(x) = 4x^3 - x + 15$. Funktionen f är då ett reellt polynom och $\deg f = 3$. Koefficienterna är $15, -1, 0$ och 4. ▲

Addition och multiplikation mellan polynom definieras genom

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x), \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x). \end{aligned}$$

Direkt följer att om $f, g \neq 0$ har vi

$$\begin{aligned} \deg(f+g) &\leq \max(\deg f, \deg g), & (26) \\ \deg(f \cdot g) &= \deg f + \deg g. & (27) \end{aligned}$$

Exempel 3.2. Anledningen till olikheten i (26) är att koefficienterna till de termer med högst gradtal kan summeras till noll och därmed försvinna. Låt t.ex. $f(x) = x^2 + x - 4 + 3i$ och $g(x) = -x^2 + 4x$. Då följer att $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 5x - 4 + 3i$, så $\deg(f+g) = 1$ men $\deg f = \deg g = 2$. ▲

Ett tal $\alpha \in \mathbb{C}$ kallas ett **nollställe** till polynomet f om $f(\alpha) = 0$. Om $x = \alpha$ löser ekvationen $f(x) = 0$ sägs α vara en **rot** till ekvationen. Självfallet är $x = \alpha$ en rot till ekvationen $f(x) = 0$ om och endast om α är ett nollställe till f. Vi säger att polynomet f är **delbart** med polynomet g om det finns ett polynom h sådant att $f = g \cdot h$.

Exempel 3.3. Polynomet $f(x) = x^2 - 1$ är delbart med $g(x) = x + 1$, ty $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$. Vi har således $f = g \cdot h$, där $h(x) = x - 1$. Talen -1 och 1 är nollställen till f. ▲

Låt f och g vara polynom med egenskapen att $\deg f \geq \deg g$. Vi kan då finna entydiga polynom k och r så att f kan skrivas på formen

$$f(x) = k(x)\,g(x) + r(x)\,, \tag{28}$$

där k och r har egenskaperna att $\deg k = \deg f - \deg g$ och $0 \leq \deg r < \deg g$. Polynomen k och r kallas kvoten respektive resten. Observera att f är delbart med g om $r(x) = 0$. Likheten (28) kallas divisionsalgoritmen. Jämför detta med heltalen då vi utför division. T.ex.

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3},$$

eller

$$7 = 2 \cdot 3 + 1.$$

Exempel 3.4. Ett sätt att beräkna kvoten och resten är genom polynomdivision. Låt $f(x) = x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 14x + 4$ och $g(x) = x^2 + 3$. Vi presenterar räkningarna både med "liggande stolen" och "trappan".

$$\begin{array}{r|rrrrrrrrrl}
 & x^2 & - & 5x & + & 1 & & & & & \\
\hline
x^2+3 & x^4 & - & 5x^3 & + & 4x^2 & - & 14x & + & 4 & \big|\, x^2+3 \\
 & -\,(x^4 & & & + & 3x^2) & & & & & \\
\cline{2-10}
 & & & -5x^3 & + & x^2 & - & 14x & + & 4 & \\
 & & - & (-5x^3 & & & - & 15x) & & & \\
\cline{3-10}
 & & & & & x^2 & + & x & + & 4 & \\
 & & & & - & (x^2 & & & + & 3) & \\
\cline{5-10}
 & & & & & & & x & + & 1 &
\end{array}$$

Överst i uppställningen ser vi kvoten $k(x) = x^2 - 5x + 1$ och nederst resten $r(x) = x + 1$. Vi kan alltså skriva f på formen

$$f(x) = (x^2 - 5x + 1)(x^2 + 3) + x + 1.$$

▲

Divisionsalgoritmen ligger till grund för den viktiga faktorsatsen.

Sats 3.5. *Låt f vara ett polynom och $\alpha \in \mathbb{C}$. Talet α är ett nollställe till f om och endast om f är delbart med $x - \alpha$.*

BEVIS: Vi börjar med att visa utsagan att om talet α är ett nollställe till f så är f delbart med polynomet $x - \alpha$. Antag att α är ett nollställe till f. Vi använder (28) med $g(x) = x - \alpha$ och får

$$f(x) = k(x)\,(x - \alpha) + r(x)\,, \tag{29}$$

där $0 \leq \deg r < \deg(x - \alpha) = 1$. Detta medför att r endast består av en konstant. Sätt $r(x) = c$. Vi kan bestämma c genom att studera (29) för $x = \alpha$:

$$f(\alpha) = k(\alpha)(\alpha - \alpha) + c = c.$$

Eftersom α är ett nollställe till f följer att $c = f(\alpha) = 0$. Vi har att $f(x) = k(x)(x - \alpha)$ vilket betyder att f är delbart med $x - \alpha$.

Antag nu att f är delbart med $x - \alpha$, vilket betyder att det finns ett polynom k så att

$$f(x) = k(x)(x - \alpha). \tag{30}$$

Vi vill undersöka om α är ett nollställe till f. Identiteten (30) ger direkt att $f(\alpha) = k(\alpha)(\alpha - \alpha) = 0$, vilket betyder att α är ett nollställe till f. ∎

3.2 Algebraiska ekvationer

Exempel 3.6. Lös ekvationen $x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0$.
LÖSNING: Vi ser direkt att $x = 1$ löser ekvationen. Låt $f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$. Polynomet f har ett nollställe för $x = 1$, d.v.s. $f(1) = 0$. Faktorsatsen ger oss då att f är delbart med polynomet $x - 1$. För att beräkna kvoten kan man antingen använda polynomdivision eller ansätta ett polynom $k(x) = ax^2 + bx + c$ och studera likheten $f(x) = k(x) \cdot (x - 1)$, d.v.s. att

$$\begin{aligned} x^3 - 5x^2 - x + 5 &= (ax^2 + bx + c)(x - 1) \\ &= ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c. \end{aligned}$$

Jämför vi koefficienter får vi att $a = 1$, $b = -4$ och $c = -5$. Vi har att

$$x^3 - 5x^2 - x + 5 = (x^2 - 4x - 5)(x - 1) = 0.$$

Löser vi andragradsekvationen får vi slutligen rötterna $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ och $x_3 = -1$. ▲

Sats 3.7 (Algebrans fundamentalsats). *Varje polynom f sådant att $\deg f \geq 1$ har ett komplext nollställe.*

För att bevisa satsen krävs mer avancerad matematik än vad vi klarar i denna stund, men håll ut! Satsen bevisas exempelvis i en kurs i komplex analys eller i en högre kurs i algebra. Tillsammans med faktorsatsen får vi en faktorisering av polynom.

Följdsats 3.8. *Låt f vara ett polynom med $\deg f = n$, där $n \geq 1$. Då kan f skrivas på formen*

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n), \tag{31}$$

där $\alpha_i \in \mathbb{C}$ är polynomets nollställen och a_n samma som i formeln (25).

BEVIS: Vi använder induktionsbevis över gradtalet n.

(a) Om ett polynom f är av gradtal 1 har det utseendet $f(x) = a_1x + a_0$ och kan därför skrivas på formen $f(x) = a_1\left(x - \frac{a_0}{a_1}\right)$.

(b) Antag att varje polynom g av gradtal n kan skrivas på formen

$$g(x) = c(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n),$$

där c och α_i är komplexa tal som beror av g. Vi vill visa att varje polynom f av gradtal $n + 1$ kan skrivas på formen

$$f(x) = c(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_{n+1}),$$

för några komplexa konstanter c och α_i. Enligt Algebrans fundamentalsats vet vi att polynomet f har ett komplext nollställe α_{n+1}. Enligt faktorsatsen är f delbart med polynomet $x - \alpha_{n+1}$, d.v.s.

$$f(x) = g(x)(x - \alpha_{n+1}), \tag{32}$$

där g är ett polynom av gradtal n. Vårt antagande säger att det finns komplexa konstanter c och $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sådana att

$$g(x) = c(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n). \tag{33}$$

Om vi kombinerar (32) och (33) får vi likheten

$$f(x) = c(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n)(x - \alpha_{n+1}). \tag{34}$$

Induktionsprincipen ger oss så när som på konstanten a_n likheten (31) för alla heltal $n \geq 1$. Utför man parentesmultiplikationen i (34) ser man att c är koefficienten till x^{n+1}, vilken är a_{n+1}. ∎

Exempel 3.9. Faktorisera polynomet

$$f(z) = 2z^3 - 2(1 + 2i)z^2 + 6(-1 + i)z + 4i(1 - i)$$

som har ett nollställe i punkten $z = 2$.
LÖSNING: Enligt följdsats 3.8 är uppgiften klar då vi vet alla nollställen till f. Enligt faktorsatsen är f delbart med polynomet $z - 2$. Låt oss ansätta $g(z) = az^2 + bz + c$ och lösa ekvationen $f(z) = g(z) \cdot (z - 2)$. Vi får

$$\begin{aligned} f(z) &= (az^2 + bz + c)(z - 2) \\ &= az^3 + (b - 2a)z^2 + (c - 2b)z - 2c. \end{aligned}$$

Jämförelse av koefficienter ger oss ekvationssystemet

$$\begin{cases} a &= 2 \\ b-2a &= -2(1+2i) \\ c-2b &= 6(-1+i) \\ -2c &= 4i(1-i), \end{cases}$$

som har lösningen $a = 2$, $b = 2-4i$ och $c = -2-2i$. Alltså är $f(z) = (2z^2+(2-4i)z-2-2i)(z-2)$. De två återstående nollställena till f är även nollställen till g, d.v.s. rötter till ekvationen $g(z) = 0$. Vi löser ekvationen $g(z) = 0$:

$$z^2+(1-2i)z-1-i=0.$$

Från delkapitel 2.2 har vi metoder för att lösa andragradsekvationer såsom denna. Lösningarna blir $z_1 = i$ och $z_2 = -1+i$. Enligt följdsats 3.8 kan vi skriva

$$f(z) = 2(z-2)(z-i)(z+1-i).$$

▲

Sats 3.10. *Låt f vara ett reellt polynom och α vara ett nollställe till polynomet. Då följer att även $\overline{\alpha}$ är ett nollställe till polynomet.*

BEVIS: Förutsättningarna för satsen säger att

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

där $a_i \in \mathbb{R}$, och

$$f(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i = 0. \tag{35}$$

Vi vill visa att $f(\overline{\alpha}) = 0$. Konjugat av ekvation (35) ger oss

$$f(\overline{\alpha}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{\alpha}^i = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i} \cdot \overline{\alpha^i} = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i \alpha^i} = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i} = \overline{f(\alpha)} = 0.$$

Här har vi använt oss av räknelagarna (7) och (8). ■

Exempel 3.11. Ekvationen $z^4-2z^3-2z^2-2z-3=0$ har roten $z_1 = i$. Bestäm samtliga rötter till ekvationen.

LÖSNING: Låt $f(z) = z^4-2z^3-2z^2-2z-3 = 0$. Eftersom $f(i) = 0$ följer av sats 3.10 att $f(\overline{i}) = f(-i) = 0$, d.v.s. $z_2 = -i$ är en rot till ekvationen $f(z) = 0$. Enligt faktorsatsen är polynomet f delbart med $(z-i)$ och $(z+i)$, d.v.s.

$$f(z) = k(z)(z-i)(z+i) = k(z)\left(z^2+1\right), \tag{36}$$

där k är ett andragradspolynom. Efter polynomdivision eller ansättning av godtyckligt andragradspolynom k följer att $k(z) = z^2 - 2z - 3$ uppfyller (36). Ekvationen $k(z) = 0$ har rötterna $z_3 = -1$ och $z_4 = 3$. Rötterna till den ursprungliga ekvationen är $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = -1$ och $z_4 = 3$. ▲

Definition 3.12. Låt f vara ett polynom. Ett nollställe α sägs vara av **multiplicitet** m om f är delbart med $(x-\alpha)^m$ men inte delbart med $(x-\alpha)^{m+1}$.

Talet α är ett nollställe till polynomet f av multiplicitet m om och endast om f kan skrivas på formen

$$f(x) = (x-\alpha)^m g(x),$$

där g är ett polynom med egenskapen att $g(\alpha) \neq 0$. Detta följer av att $g(\alpha) = 0$ om och endast om g kan skrivas på formen $g(x) = (x-\alpha)k(x)$, vilket insatt i f är

$$f(x) = (x-\alpha)^{m+1} k(x). \tag{37}$$

Från definitionen av att α är ett nollställe till polynomet f av multiplicitet m följer att (37) ej kan gälla. Alltså följer att $g(\alpha) \neq 0$.

Lemma 3.13. *Låt f vara ett polynom och α ett nollställe till f av multiplicitet $m \geq 2$. Då gäller att α är ett nollställe till f' av multiplicitet $m-1$.*

BEVIS: Vi vet att α är ett nollställe till f av multiplicitet m, d.v.s.

$$f(x) = (x-\alpha)^m g(x),$$

där $g(\alpha) \neq 0$. Produktregeln för derivator ger oss

$$\begin{aligned} f'(x) &= m(x-\alpha)^{m-1} g(x) + (x-\alpha)^m . g'(x) \\ &= (x-\alpha)^{m-1} \left(m g(x) + (x-\alpha) g'(x) \right). \end{aligned}$$

Slutligen måste vi verifiera att f' ej är delbart med $(x-\alpha)^m$, vilket är detsamma som att verifiera att

$$\left(m g(\alpha) + (\alpha - \alpha) g'(\alpha) \right) = m g(\alpha) \neq 0.$$

Detta följer av att $m \neq 0$ och $g(\alpha) \neq 0$. ■

Detta lemma ligger till grund för en allmännare sats.

Sats 3.14. *Låt f vara ett polynom. Ett tal α är ett nollställe till f av någon multiplicitet större än eller lika med $m \geq 2$ om och endast om*

$$\frac{d^k f}{dx^k}(\alpha) = 0,$$

för alla k, sådana att $0 \leq k \leq m-1$.

Bevis: Vi börjar med att visa att om α är ett nollställe till f av någon multiplicitet större än eller lika med $m \geq 2$ följer att

$$\frac{d^k f}{dx^k}(\alpha) = 0$$

för alla k sådana att $0 \leq k \leq m-1$. Antag att α är ett nollställe till f av multiplicitet l, där $l \geq m \geq 2$. Från lemma 3.13 följer att α är ett nollställe till f' av multiplicitet $l-1 \geq m-1$, vilket ger att för något polynom g har vi

$$\frac{df}{dx}(x) = (x-\alpha)^{m-1} g(x)$$

och speciellt

$$\frac{df}{dx}(\alpha) = 0.$$

Upprepar vi lemma 3.13 får vi att α är ett nollställe till f'' av multiplicitet $l-2 \geq m-2$, vilket ger att

$$\frac{d^2 f}{dx^2}(\alpha) = 0.$$

Vi kan fortsätta på detta vis och får slutligen att α är ett nollställe till $\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}$ av multiplicitet $l-m+1 \geq 1$ och speciellt har vi:

$$\frac{d^{m-1}f}{dx^{m-1}}(\alpha) = 0.$$

Vi vill även visa det omvända resultatet. Antag att

$$\frac{d^k f}{dx^k}(\alpha) = 0 \tag{38}$$

för alla k, sådana att $0 \leq k \leq m-1$. Vi vill visa att f är delbart med polynomet $(x-\alpha)^m$. Vi använder divisionsalgoritmen:

$$f(x) = (x-\alpha)^m k(x) + r(x),$$

där polynomen k och r är kvoten respektive resten då f divideras med $(x-\alpha)^m$. Vi vill visa att polynomet $r = 0$. Vi vet att $0 \leq \deg r \leq m-1$, vilket medför att vi kan ansätta

$$r(x) = a_0 + a_1(x-\alpha) + a_2(x-\alpha)^2 + \ldots + a_{m-1}(x-\alpha)^{m-1}.$$

Definiera $h(x) = (x-\alpha)^m k(x)$. Eftersom α är ett nollställe till h av multiplicitet $m \geq 2$, vet vi från den bevisade delen av satsen att

$$\frac{d^k h}{dx^k}(\alpha) = 0, \tag{39}$$

för alla k sådana att $0 \leq k \leq m-1$. Ekvationerna (38) och (39) ger att

$$\frac{d^k r}{dx^k}(\alpha) = 0, \tag{40}$$

för alla k sådana att $0 \leq k \leq m-1$. Koefficienten a_0 är noll, ty från (40) med $k = 0$ har vi

$$r(\alpha) = a_0 = 0.$$

Låt oss derivera r

$$r'(x) = a_1 + 2a_2(x-\alpha) + \ldots + (m-1)a_{m-1}(x-\alpha)^{m-2}. \tag{41}$$

Från (40) och (41) får vi $r'(\alpha) = a_1 = 0$. Fortsätter vi i denna anda och beräknar derivatorna $\frac{d^k r}{dx^k}$ och därefter använder (40) får vi att $a_k = 0$ för alla k sådana att $0 \leq k \leq m-1$. Detta visar att polynomet $r = 0$ och därmed att

$$f(x) = (x-\alpha)^m k(x),$$

vilket visar satsen. ■

Exempel 3.15. Ekvationen $x^4 - 4x^3 + 27 = 0$ har en dubbelrot, d.v.s. en rot av multiplicitet 2. Lös ekvationen.

LÖSNING: Bilda $f(x) = x^4 - 4x^3 + 27$. Enligt sats 3.14 är dubbelroten till $f(x) = 0$ även en rot till ekvationen $f'(x) = 0$. Vi söker därför nollställena till $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$. Nollställena till f' blir $x = 0$ och $x = 3$. Vi ser att $x = 0$ ej löser ursprungsekvationen, alltså är $x = 3$ en dubbelrot. Vi verifierar detta genom att beräkna $f(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3 + 27 = 81 - 108 + 27 = 0$. Faktorsatsen ger oss att f är delbart med polynomet $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$. Utför vi polynomdivision får vi att

$$f(x) = (x-3)^2(x^2 + 2x + 3).$$

Resterande rötter till ekvationen finner vi genom att beräkna $x^2 + 2x + 3 = 0$. Lösningarna är $x_3 = -1 + i\sqrt{2}$ och $x_4 = -1 - i\sqrt{2}$. Sammanfattningsvis är rötterna till ekvationen $x_1 = x_2 = 3, x_3 = -1 + i\sqrt{2}$ och $x_4 = -1 - i\sqrt{2}$.

▲

För att lösa en polynomekvation av högre ordning än två har vi endast givit metoden att gissa rötter och därefter faktorisera ut förstagradsuttryck för att reducera gradtalet på ekvationen med 1. Det finns exakta formler för rötterna till polynomekvationer upp till och med gradtal 4 men man har visat att det ej går att få fram liknande formler för högre gradtal. För att veta vilka rötter man ska gissa på kan man i vissa fall använda följande sats.

Sats 3.16. *Låt $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, där $a_i \in \mathbb{Z}$ för alla i. Antag att bråket $\frac{p}{q}$ ej går att förkorta och att det är en rot till ekvationen $f(x) = 0$. Då följer att a_0 är delbar med p och att a_n är delbar med q.*

BEVIS: Vi vet att $\frac{p}{q}$ är en rot till ekvationen $f(x) = 0$, d.v.s.

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i p^i q^{-i} = 0$$

eller, efter multiplikation med q^n,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i p^i q^{n-i} = a_0 q^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i p^i q^{n-i} + a_n p^n = 0. \tag{42}$$

Vi visar att a_0 är delbar med p. Att a_n är delbart med q följer analogt.

Efter omskrivning av (42) får vi

$$a_0 q^n = -\sum_{i=1}^{n-1} a_i p^i q^{n-i} - a_n p^n = p\left(-\sum_{i=1}^{n} a_i p^i q^{n-i}\right).$$

Här ser vi att högerledet är delbart med talet p. Eftersom vänsterledet är identiskt med högerledet följer att även vänsterledet är delbart med p, d.v.s.

$$a_0 q^n = pb, \tag{43}$$

för något heltal b. Här använder vi aritmetikens fundamentalsats som säger att varje heltal större än 1 på ett entydigt sätt kan skrivas som en produkt av primtal[2]. Alla primtalsfaktorer som tillsammans bygger upp talet p i högerledet av (43) måste finnas i a_0, ty i annat fall kan vi förkorta bråket $\frac{p}{q}$ vilket strider mot satsens antagande. Alltså är a_0 delbart med p. ■

Exempel 3.17. Lös ekvationen $x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = 0$.
LÖSNING: Möjliga rationella rötter $\frac{p}{q}$ är enligt sats 3.16 således fallen då $p = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ och $q = (\pm)1$. Vi ser att då koefficienten till x^3 är 1 får vi att de möjliga rationella rötterna är heltal. Efter testande av möjliga heltalsrötter finner vi att $x_1 = 3$ är en rot. Efter polynomdivision eller annan metod ser vi att $x_2 = \sqrt{2}$ och $x_3 = -\sqrt{2}$. ▲

3.3 Samband mellan rötter och koefficienter

Låt $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n$ ha de komplexa talen nollställena $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Enligt sats 3.8 kan f skrivas på formen

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n).$$

[2]Ett tal $p \geq 2$ är ett primtal om p endast är delbart med talen ± 1 och $\pm p$

För att få en konstant term ur detta uttryck måste vi multiplicera $-\alpha_1$ ur den första parentesen med $-\alpha_2$ ur den andra o.s.v. Vi får

$$\begin{aligned} a_0 &= (-\alpha_1)(-\alpha_2)\cdots(-\alpha_n) \\ &= (-1)^n \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} \alpha_i. \end{aligned}$$

Det finns även ett enkelt uttryck för koefficienten a_{n-1}. För att få en term av typen cx^{n-1}, där c är en konstant, måste vi multiplicera x i alla parenteser utom i en av dem. Ur denna återstående väljer vi $-\alpha_i$, för något heltal i sådant att $1 \leq i \leq n$. Vi kommer att få n olika termer av denna typ. Summan av dessa blir:

$$-\alpha_1 x^{n-1} - \alpha_2 x^{n-1} - \ldots - \alpha_n x^{n-1} = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)x^{n-1}.$$

Vi vet från introducerandet av polynomet f att denna koefficient är a_{n-1}. Alltså har vi identiteten

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -a_{n-1}.$$

Exempel 3.18. Låt oss studera detta fenomen i fallet $n = 3$, för att undvika att drunkna i teknisk notation. Låt

$$f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \tag{44}$$

ha nollställena α_1, α_2 och α_3. Vi kan nu skriva f på formen

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3). \tag{45}$$

Utför vi multiplikationen i (45) får vi

$$f(x) = x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Jämför vi koefficienterna i (44) och (45) får vi sambanden:

$$\begin{cases} a_2 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ a_1 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 \\ a_0 = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3. \end{cases}$$

▲

3.4 Övningar

3.1. Lös ekvationerna

(a) $z^4 + 2iz^2 + 3 = 0$,

(b) $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$,

(c) $z^6 - 2iz^3 - 4 = 0$.

3.2. Låt w vara en rot till ekvationen $z^n = 1$. Visa att

$$\sum_{k=0}^{n-1} w^k = 0.$$

3.3. Ett andragradspolynom antar värdena $0, 1, 1$ för $x = 1, 2$ respektive 3. Bestäm polynomet.

3.4. Hur många komplexa rötter har ekvationen

$$z(z - z^3 + 1) + z^6 = z^3(z^3 - z + 2)?$$

3.5. Kan det finnas någon polynomekvation med sex olika rötter, varav fem rötter ligger i intervallet $]0, 1[$ och en rot i intervallet $]1000, \infty[$?

3.6. De fem olika rötterna till ekvationen $z^5 - 1 = 0$ betecknas $1, z_1, z_2, z_3$ och z_4. Beräkna $(1 - z_1)(1 - z_2)(1 - z_3)(1 - z_4)$. Det är inte nödvändigt att lösa ekvationen.

3.7. Lös ekvationen $z^3 - iz^2 - z + i = 0$, då man vet att $z = i$ är en rot.

3.8. Bestäm talet a så att ekvationen $z^3 - 4z^2 - 2z + a = 0$ får roten $z = -2$. Lös ekvationen.

3.9. Bestäm det komplexa talet a så att ekvationen $z^3 - (1 + i)z^2 + (4 + 3i)z + a = 0$ får roten $z = i$. Lös ekvationen fullständigt.

3.10. Bestäm en polynomekvation med reella koefficienter så att den är av lägsta möjliga grad och har rötterna $2 + i, -i$ och 1.

3.11. Ekvationen $z^4 + 2z^3 + 6z^2 + 8z + 8 = 0$ har rötterna $2i$ och $-1 + i$. Bestäm de övriga rötterna.

3.12. Ekvationen $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 2 = 0$ har en rot $z = -1 + i$. Bestäm samtliga rötter.

3.13. Ekvationen $z^4 - 8z^3 + 51z^2 - 98z + 170 = 0$ har roten $3 + 5i$. Bestäm samtliga rötter.

3.14. Ekvationen $z^4 + 3z^3 + z^2 + 18z - 30 = 0$ har en rent imaginär rot. Lös ekvationen fullständigt.

3.15. Bestäm de reella talen a och b så att ekvationen $z^3 + az + b = 0$ får roten $z = 1 - 2i$. Lös ekvationen fullständigt.

3.16. Uppdela så långt som möjligt i reella faktorer:

(a) $x^4 + 1$,

(b) $x^4 + x^2 + 1$,

(c) $x^6 - 1$,

(d) $x^9 - x^6 - x^3 + 1$,

(e) $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$.

3.17. Ett polynom $x^2 + ax + b$ ger vid division med $x + 2$ resten 1 och vid division med $x - 10$ resten 13. Bestäm polynomet.

3.18. Polynomet p ger resten 7 vid division med $(x - 4)$ och resten 5 vid division med $(x - 3)$. Vilken rest ger p vid division med $(x - 4)(x - 3)$?

3.19. Bestäm de reella talen a och b så att ekvationen $z^4 + az^3 + bz^2 - 12z = 15$ har roten $z = -2 - i$. Lös ekvationen fullständigt.

3.20. Ekvationen $z^4 + z^3 + 2z^2 + 2z + 4 = 0$ har en rot med real- och imaginärdel lika. Lös ekvationen.

3.21. Ekvationen $z^4 - 6z^3 + 15z^2 - 18z + 10 = 0$ har en rot med realdelen dubbelt så stor som imaginärdelen. Lös ekvationen.

3.22. Uppdela polynomet $f(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ i reella faktorer av högst grad två.

Ledning: Studera $(x - 1)f(x)$.

3.23. Ange summan respektive produkten av alla rötter till ekvationen $4z^7 + 2z^3 + 3z^2 - 100 = 0$.

3.24. Beräkna summan av rötterna till ekvationen $(z - 1)^8 = 1$.

3.25. Givet ekvationen $z^2 - (1 + 5i)z - 6 + 3i = 0$, beräkna produkten av rötternas konjugerade värden.

3.26. Visa att $z^{17} + z^7 + 1$ är delbart med $z^2 + z + 1$.

3.27. Ekvationen $3x^5 - 5x^4 - 20x^3 + 65x + 53 = 0$ har en trippelrot för $x = -1$. Lös ekvationen.

4 Svar till övningar

2.1.

(a) $2+5i$,

(b) $12-6i$.

2.2.

(a) $-3-4i$,

(b) $10-10i$,

(c) $\frac{1}{25}(1+7i)$.

2.3. $a=\frac{3}{5}$.

2.7.

(a) $z_{1,2}=\pm(1-i)$,

(b) $z_{1,2}=\pm(5+4i)$.

2.8.

(a) $z_{1,2}=2-i\pm\sqrt{2+3i}$,

(b) $z_1=3$ och $z_2=-1+2i$.

2.9. $\frac{\pi}{4}$.

2.11.

(a) $e^{i\frac{\pi}{2}}$,

(b) $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$,

(c) $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$,

(d) e^{-i}.

2.12.

(a) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

(b) $-\frac{1}{4}(1+i)$,

(c) $\frac{1}{5}(4+3i)$,

(d) $\frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i)$.

2.13.

(a) $z_1 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), z_2 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$ och $z_3 = -1$,

(b) $z_k = \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi k}{8}}$, för $k = 0, 1, 2, \ldots, 7$,

(c) $z_k = 2^{\frac{1}{12}}e^{i\frac{\pi + 8\pi k}{24}}$, för $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

3.1.

(a) $z_{1,2} = \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ och $z_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(1 - i)$,

(b) $z_{1,2} = \pm 1, z_{3,4} = \pm 2, z_{5,6} = \pm i$ och $z_{7,8} = \pm 2i$,

(c) $z_k = 2^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\pi + 12k\pi}{18}}$, för $k = 0, 1, 2$ och $z_k = 2^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{5\pi + 12k\pi}{18}}$, för $k = 3, 4, 5$.

3.3. $-\frac{x^2}{2} + \frac{5x}{2} - 2$.

3.4. 3, ty ekvationen är av grad 3.

3.5. Ja, t.ex. $(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{5})(x - \frac{1}{6})(x - 1001) = 0$.

3.6. 5.

3.7. $z_1 = i$ och $z_{2,3} = \pm 1$.

3.8. $a = 20, z_1 = -2$ och $z_{2,3} = 3 \pm i$.

3.9. $a = 2 - 4i, z_1 = i, z_2 = 1 - 2i$ och $z_3 = 2i$.

3.10. $z^5 - 5z^4 + 10z^3 - 10z^2 + 9z - 5 = 0$.

3.11. $z_{1,2} = \pm 2i$ och $z_{3,4} = -1 \pm i$.

3.12. $z_{1,2} = -1 \pm i$ och $z_{3,4} = \pm i$.

3.13. $z_{1,2} = 3 \pm 5i$ och $z_{3,4} = 1 \pm 2i$.

3.14. $z_{1,2} = \pm i\sqrt{6}$ och $z_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$.

3.15. $a = 1, b = 10, z_{1,2} = 1 \pm 2i$ och $z_3 = -2$.

3.16.

(a) $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$,

(b) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$,

(c) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$,

(d) $(x - 1)^2\left(x^2 + x + 1\right)^2(x + 1)(x^2 - x + 1)$,

(e) $(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

3.17. $x^2 - 7x - 17$.

3.18. $2x - 1$.

3.19. $a = 4, b = 2, z_{1,2} = -2 \pm i$ och $z_{3,4} = \pm\sqrt{3}$.

3.20. $z_{1,2} = -1 \pm i$ och $z_{3,4} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.

3.21. $z_{1,2} = 2 \pm i$ och $z_{3,4} = 1 \pm i$.

3.22. $(x + 1)(x^2 + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$.

3.23. Summan $= 0$ och produkten $= 25$.

3.24. 8.

3.25. $-6 - 3i$.

3.27. $x_1 = x_2 = x_3 = -1$ och $x_{4,5} = \frac{7 \pm \sqrt{10}}{3}$.