Matematiska Institutionen, KTH

Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra, SF1604, för CDATE, CTFYS och vissa CL, tisdagen den 20 maj 2014 kl 08.00-13.00.

Examinator: Olof Heden.

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Bonuspoäng förvärvade under läsåret 2013-2014 får användas. Den som har b bonuspoäng får använda högst fem av dessa poäng för att uppnå maximalt 15 poäng på del I. Till poängsumman på del II och del III adderas sedan det största av talen $b-5$ och 0.

För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 40p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
20	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
25	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
30	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
35	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

DEL I

1. Låt $\mathbf{A}$ beteckna matrisen nedan:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 13 & 30 \\ -5 & -12 \end{pmatrix}$$

   (a) (3p) Bestäm $\mathbf{A}$:s samtliga egenvärden och samtliga tillhörande egenvektorer.

   (b) (2p) Bestäm en diagonalmatris $\mathbf{D}$ och matriser $\mathbf{B}$ och $\mathbf{C}$ sådana att $\mathbf{A} = \mathbf{BDC}$.

2. (4p) Den linjära avbildningen A från R^4 till R^3 definieras genom

$$\begin{aligned} A(1,1,1,1) &= (1,2,1) \\ A(0,1,1,1) &= (2,4,2) \\ A(0,0,1,1) &= (1,2,3) \\ A(0,0,0,1) &= (2,4,a) \end{aligned}$$

   Bestäm avbildningens matris relativt standardbaserna i R^3 och R^4. Bestäm också, för samtliga värden på talet a, en bas för avbildningens kärna samt dimensionen hos A:s bildrum.

3. (ON-system) Låt ℓ beteckna linjen med parameterformen

$$\ell : (x,y,z) = (1,1,1) + t(0,1,-1),$$

   och låt P och Q beteckna punkterna med koordinaterna

$$P = (1,2,3) \qquad \text{resp} \qquad Q = (3,2,1).$$

   (a) (2p) Bestäm ekvationen för det plan π som innehåller linjen ℓ och punkten P.

   (b) (2p) Bestäm avståndet från punkten Q till planet π.

   (c) (2p) Bestäm ekvationen för ett plan π' som innehåller linjen ℓ och som har samma avstånd till P som till Q.

DEL II

4. (a) (2p) Låt talföljden a_0, a_1, ... definieras av att $a_0 = 2$ och $a_1 = 1$ samt att
$$a_{n+2} = a_{n+1} + 12a_n, \quad \text{för} \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$
Ge ett induktionsbevis för att $a_n = 4^n + (-3)^n$ för $n = 0, 1, \ldots$.

(b) (2p) Ange på formen $a + ib$ (dvs inte på polär form) minst sex av rötterna till ekvationen $z^{24} = 1$.

(c) (2p) Är det sant att om två av rötterna till en binomisk ekvationen $z^n = a$ är rent imaginära så måste talet a vara reellt? Motivera ditt svar!

5. Betrakta vektorrummet $\mathcal{P}$ bestående av alla polynom med reella koefficienter. Låt $\mathcal{P}_2$ beteckna delrummet bestående av polynom av grad högst två. Vi inför en inre-produkt $\langle\, p(t) \mid q(t)\rangle$ i rummet $\mathcal{P}$ genom
$$\langle\; p(t) \;\mid\; q(t) \;\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,\mathrm{dt}\,,$$
och definierar avståndet mellan två polynom $p(t)$ och $q(t)$ genom
$$||\,p(t) - q(t)\,|| = \sqrt{\langle\, p(t) - q(t) \mid p(t) - q(t)\,\rangle}\,.$$

(a) (1p) Bestäm avståndet mellan polynomen $p(t) = 1 - 3t^2$ och t^3.

(b) (3p) Undersök om polynomet $p(t)$ ovan är det polynom i $\mathcal{P}_2$ som ligger närmast polynomet t^3.

6. (5p) Antag att 3×3-matrisen $\mathbf{A}$ har egenvärdena 1, -1 och 5. Visa att det finns ett 2-dimensionellt delrum π i $\mathbb{R}^3$ sådant
$$(x_1, x_2, x_3) \in \pi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{A}^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$
(**OBS** Motivera noggrant, avsaknad av korrekt argumentering resulterar i poängavdrag.)

DEL III (Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigtvis ordagrant, där de används i lösningen.)

7. Betrakta i $\mathbb{R}^3$ de tre linjerna
$$\begin{array}{lcccccc} \ell_1 & : & (x,y,z) & = & (4,-2,4) & + & t\,(0,1,1) \\ \ell_2 & : & (x,y,z) & = & (2,-3,1) & + & t\,(3,1,1) \\ \ell_3 & : & (x,y,z) & = & (0,-3,11) & + & t\,(1,1,-1) \end{array}$$

(a) (2p) Bestäm en linje ℓ som skär alla tre linjerna ovan.

(b) (1p) Det finns oändligt många linjer som skär de tre givna linjerna ovan. Förklara varför två av dessa oändligt många linjer inte kan skära varandra.

(c) (2p) Vad krävs av tre linjer ℓ_1, ℓ_2 och ℓ_3 för att det skall finnas minst en linje ℓ som skär alla tre linjerna.

8. (5p) Under vilka förutsättningar på matriserna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ gäller att en matrisekvation
$$\mathbf{AXA} = \mathbf{B}$$
has oändligt många lösningar $\mathbf{X}$.