Matematiska Institutionen, KTH

Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra, SF1604, den 14 mars 2014 kl 08.00-13.00.

Examinator: Olof Heden.

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Bonuspoäng förvärvade under läsåret 2013-2014 får användas. Den som har b bonuspoäng får använda högst fem av dessa poäng för att uppnå maximalt 15 poäng på del I. Till poängsumman på del II och del III adderas sedan det största av talen $b-5$ och 0.

För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 40p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
20	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
25	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
30	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
35	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

DEL I

1. (ON-system) Låt $\bar{u} = (1, 2, 3)$ och $\bar{v} = (0, 1, 1)$ vara två vektorer i R^3

   (a) (3p) Bestäm längden av vektorn $\bar{u}$, cosinus för vinkeln mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$, samt en vektor $\bar{w}$ vars längd är 1 och vars riktning är vinkelrät mot både $\bar{u}$ och $\bar{v}$.

   (b) (2p) Betrakta planet π som innehåller punkten $(1, 2, -1)$ och som är parallellt med vektorerna $\bar{u}$ och $\bar{v}$. Bestäm det (eller de) reella tal a för vilket punkter med koordinaterna $(3, 5, a)$ ligger i planet π.

2. Låt a vara ett reellt tal och låt$\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ beteckna nedanstående matriser:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

   (a) (2p) Bestäm matrisen $\mathbf{A}$:s invers $\mathbf{A}^{-1}$.

   (b) (1p) Bestäm, för varje värde på a, en matris $\mathbf{X}$ sådan att $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$.

   (c) (2p) Undersök för vilka värden på det reella talet a som det finns en matris $\mathbf{Y}$ sådan att $\mathbf{A} = \mathbf{BY}$.

3. (5p) Låt $\mathbf{A}$ beteckna matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

   Bestäm en diagonalmatris $\mathbf{D}$ och en matris $\mathbf{B}$ sådana att $\mathbf{A} = \mathbf{BDB}^{-1}$.

DEL II

4. Låt a vara ett reellt tal och låt A beteckna den linjära avbildning från R^3 till R^5 som definieras av
$$A(1,1,1) = (1,1,2,1,3), \quad A(1,2,3) = (1,2,2,2,-1), \quad A(0,1,1) = (2,3,4,3,a).$$
   (a) (2p) Bestäm A:s kärna $\ker(A)$ när $a = 1$ och när $a = 2$.
   (b) (2p) Om $a = 1$ finns linjära avbildningar B från R^5 till R^3 sådana att $B \circ A\bar{x} = \bar{x}$ för varje vektor $\bar{x}$ i R^3. Bestäm två olika sådan linjära avbildningar B.
   (c) (2p) För vilka värden på a är A injektiv (dvs ”ett till ett” eller 1-1). För vilka värden på a är A en inverterbar linjär avbildning.

5. Betrakta i R^4 lösningsmängderna Π_1 och Π_2 till systemen
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases} \text{resp} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$
   (a) (2p) Bestäm Π_1, dvs bestäm samtliga lösningar till det vänstra systemet ovan.
   (b) (3p) (ON-system) Bestäm avståndet mellan Π_1 och Π_2.

6. (4p) Finns det någon symmetrisk 3×3-matris $\mathbf{A}$ sådan att $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ och
$$(3\ \ 5\ \ 2)\mathbf{A} = (1\ \ 4\ \ 1).$$
(**OBS.** Ett svar med enbart antingen ”ja” eller ”nej” utan någon motivering ger inga poäng på detta problem.)

DEL III (Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.)

7. (ON-system) Låt π_1 beteckna mängden av 3-tipplar $(x_1\ \ x_2\ \ x_3)$ sådana att $x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3$ och låt π_2 beteckna mängden av 3-tipplar $(x_1\ \ x_2\ \ x_3)$ sådana att $3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7$.
   (a) (1p) Bestäm en matris $\mathbf{B}$ sådan att
$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \in \pi_1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \mathbf{B}^T \in \pi_2 \tag{1}$$
   (b) (2p) Undersök om det finns någon ortogonalmatris $\mathbf{B}$ med ovanstående egenskap.
   (c) (2p) Undersök om det finns någon matris $\mathbf{B}$ med rang 2 för vilken ekvivalensen i ekvationen (1) ovan gäller.
   (d) (1p) Undersök om det finns någon matris $\mathbf{B}$ sådan att $\det(\mathbf{B}) = 1$ och för vilken ekvivalensen i ekvationen (1) ovan gäller.

8. (1p+1p+2p, max 4p) Bestäm det största värdet som
$$\text{rang}(\mathbf{AB}) - \text{rang}(\mathbf{BA}).$$
kan anta för två $n \times n$-matriser $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$.
(**OBS.** En korrekt gissning ger 1p, en korrekt lösning när $n = 4$ ger 1p, och man får 4p för en korrekt lösning av problemet för godtyckligt n. Ett svar som motiveras med goda resonemang och ”kloka” argument kan komma att premieras med fler poäng än ett.)