Matematiska Institutionen
KTH

Lösning av ett projektionsproblem.

Exempel. Bestäm projektionen av vektorn $\bar{b} = (1, 2, 1, 1)$ på nollrummet till matrisen

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösning. Nollrummet $\mathrm{N}(\mathbf{B})$ till en matris $\mathbf{B}$ är ortogonala komplementet till $\mathbf{B}$:s radrum L. Låt $\bar{w}$ vara $\bar{b}$:s projektion på $\mathbf{B}$:s radrum L. Då gäller att

$$\bar{d} = \bar{b} - \bar{w}$$

är projektionen av $\bar{b}$ på L:s ortogonala komplement, och därmed projektionen av $\bar{b}$ på $\mathbf{B}$:s nollrum.

Vi bestämmer $\bar{w}$ med den allmänna projektionsformeln: Låt K vara ett delrum till ett vektorrum V och antag att vektorerna $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, ..., $\bar{v}_k$ utgör en bas för delrummet K. Då gäller att projektionen $\bar{w}$ av en vektor $\bar{b}$ på K ges av

$$\begin{pmatrix} | \\ \bar{w} \\ | \end{pmatrix} = \mathrm{Proj}_K(\bar{b}) = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T \begin{pmatrix} | \\ \bar{b} \\ | \end{pmatrix} \qquad \text{där} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \cdots & \bar{v}_k \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Vi observerar att $(1, 1, 1, 1)$ och $(0, 1, 2, 3)$ utgör en bas för $\mathbf{B}$:s radrum och får då

$$\begin{pmatrix} | \\ \bar{w} \\ | \end{pmatrix} = \mathrm{Proj}_L(\bar{b}) = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{där} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matrismultiplikation ger nu

$$\begin{pmatrix} | \\ \bar{w} \\ | \end{pmatrix} = \mathrm{Proj}_L(\bar{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 56 \\ -14 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 56 \\ 42 \\ 28 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.8 \\ 2.1 \\ 1.4 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

Vi sökte $\bar{d} = \bar{b} - \bar{w}$ så

SVAR: Den sökta projektionen är

$$\bar{d} = (1, 2, 1, 1) - (2.8, 2.1, 1.4, 0.7) = (-1.8, -0.1, -0.4, 0.3).$$