Matematiska Institutionen,
KTH

Problem till övning nr 11 den 25 februari, Linjär algebra D1, SF1604, vt 14.

1. (E) Låt $\mathbf{A}$ beteckna nedanstående matris

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & -6 & 3 \\ 4 & -10 & 5 \end{pmatrix}$$

   Bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till $\mathbf{A}$. Diagonalisera matrisen $\mathbf{A}$, Bestäm $\mathbf{A}^{1023}$ samt bestäm

$$\mathbf{A}^{366} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. (D) Vektorerna $\bar{u} = (1, 0, 1)$, $\bar{v} = (0, 2, -3)$ och $\bar{w} = (2, 1, 0)$ är egenvektorer till matrisen $\mathbf{A}$ hörande till egenvärdena $\lambda = 2$, $\lambda = 0$ och $\lambda = 1$, respektive. Bestäm matrisen $\mathbf{A}$, samt bestäm samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen $\mathbf{A}^5$.

3. (D) Bestäm samtliga egenvärden med tillhörande egenrum till matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Bestäm också $\mathbf{A}^n$ för $n = 2, 3, 4, \ldots$.

4. (D) Kan en kvadratisk matris vara inverterbar om ett av matrisens egenvärden är lika med 0?

5. (E) Genomför en ortogonal diagonalisering av matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -2 \\ -5 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

6. **Fler övningar finns i läroboken. Se förslag i kursPM. Övning ger färdighet.**

SVAR

1. Egenvärden är $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ och $\lambda = -1$, med tillhörande egenrum $E_0 = \text{span}\{(0,1,2)\}$, $E_1 = \text{span}\{(1,2,4)\}$ och $E_{-1} = \text{span}\{(1,1,1)\}$. Med

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

så har $\mathbf{A}$ diagonaliseringen $\mathbf{A} = \mathbf{TDT}^{-1}$. Vidare är $\mathbf{A}^{1023} = \mathbf{A}$ samt

$$\mathbf{A}^{366} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 2 & -3 & -2 \\ -6 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

Matrisen $\mathbf{A}^5$ har egenvärdena $\lambda = 32$, $\lambda = 0$ och $\lambda = 1$ med tillhörande egenrum

$$E_{32} = \text{span}\{(1,0,1)\}, \quad E_0 = \text{span}\{(0,2,-3)\}, \quad E_1 = \text{span}\{(2,1,0)\}.$$

3. Enda egenvärdet är $\lambda = 0$ med tillhörande egenrum $E_0 = \text{span}\{(1,0,0)\}$.

4. Nej.

5. Med $\mathbf{D}$ och $\mathbf{Q}$ enligt nedan

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

så är $\mathbf{Q}$ en ortogonalmatris och $\mathbf{A} = \mathbf{QDQ}^T$ en ortogonal diagonalisering av $\mathbf{A}$.