Matematiska Institutionen, KTH

Problem till övning nr 1, Linjär algebra D1, SF1604, vt 14.

1. (E) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 2x + 5y + z = 2 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

2. (E) Lös, dvs bestäm samtliga lösningar till, de bägge systemen nedan

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y + 2z = 4 \\ 2x + y + z = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y + 2z = 4 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$$

3. (D) Beskriv på något lämpligt sätt de taltriplar (a, b, c) för vilka nedanstående system är lösbart

$$\begin{cases} x + y - z = a \\ x + 2y + 2z = b \\ x + 3y + 5z = c \end{cases}$$

4. (D) Bestäm samtliga värden på talen a och b för vilka systemet nedan är lösbart, dvs har precis en lösning eller oändligt många lösningar.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ x + y + 2z = 1 \\ y + az = b \end{cases}$$

5. (E) Varje homogent ekvationssytem med fler obekanta än ekvationer har oändligt många lösningar. Bestäm samtliga lösningar till nedanstående homogena ekvationssytem

$$\begin{cases} x + 2y - z + w + u = 0 \\ x - y + 4z - w + 2u = 0 \\ x + y + 3w + u = 0 \end{cases}$$

6. (E) Låt $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ och $\mathbf{I}$ beteckna nedanstående 3×3-matriser:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Bestäm $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$, $(2\mathbf{A}) \cdot (3\mathbf{B})$ och $\mathbf{A}(\mathbf{B} + 2\mathbf{I})$.

7. (E) Bestäm $\mathbf{CC}^T$ och $\mathbf{C}^T\mathbf{C}$ om $\mathbf{C}$ är nedanstående 1×4-matris

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. (E) Skriv ekvationssystemet i uppgift 1 som en matrisekvation $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, med $\mathbf{x} = (x \;\; y \;\; z)^T$.

9. (C) Låt $\mathbf{0}$ beteckna en nollmatris. Antag att både $\mathbf{c}$ och $\mathbf{c}'$ är lösningar till det linjära och homogena ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, dvs $\mathbf{Ac} = \mathbf{0}$ och $\mathbf{Ac}' = \mathbf{0}$. Är det då sant att $\mathbf{c} + t \cdot \mathbf{c}'$ är en lösning till $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ för varje reellt tal t.

10. (B) Antag att du får reda på att $\mathbf{x} = (1 \;\; 3 \;\; -1)^T$ och $\mathbf{y} = (1 \;\; 0 \;\; 2)^T$ är lösningar till systemen

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{respektive} \qquad \mathbf{By} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Räcker denna information för att bestämma a) en lösning, b) samtliga lösningar, till systemet nedan

$$(\mathbf{BA})\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}$$

11. Fler övningar finns i läroboken. Se förslag i kursPM. Träna själv eller i grupp. Övning ger färdighet.

SVAR:

1. $(x,y,z) = (-2,1,1)$.
2. $(x,y,z) = (3,-1,0) + t(-1,1,1)$ resp lösning saknas.
3. $a - 2b + c = 0$.
4. Lösbart utom när $a = -3$ och $b \neq 2$.
5. $(x,y,z,u,w) = s(1,1,1,0,-2) + t(-13,2,0,1,8)$.
6. $$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$
$$(2\mathbf{A})\cdot(3\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 6 & 12 & -12 \\ 12 & 36 & 0 \\ 0 & 6 & 30 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}(\mathbf{B}+2\mathbf{I}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$
7. $$\mathbf{CC}^T = (4) \qquad \mathbf{C}^T\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
8. $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
9. Ja ty
$$\mathbf{A}(\mathbf{c}+t\mathbf{c}') = \mathbf{Ac} + t\mathbf{Ac}' = \mathbf{0} + t\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$
10. Jag det går att bestämma en lösning, nämligen $\mathbf{z} = (1 \;\; 3 \;\; -1)$ eftersom
$$(\mathbf{BA})\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}) = \mathbf{B}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}$$
Men det skulle kunna finnas flera lösningar, eftersom det ”första systemet” skulle kunna ha fler än en lösning.