Matematiska Institutionen, KTH

Problem till övning nr 2, Linjär algebra D1, SF1604, vt 14.

1. (E) Låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ beteckna nedanstående matriser

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

   Bestäm $\mathbf{A}^{-1}$ och $\mathbf{B}^{-1}$.

2. (E) Lös de linjära ekvationssystemen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

3. (E) Bestäm en matris $\mathbf{X}$ sådan att

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. (E) Bestäm de reella tal a för vilka nedanstående matris är inverterbar

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & a+3 & a \end{bmatrix}$$

5. (B) För vilka reella tal c finns det en matris $\mathbf{X}$ och reella tal a, b och d sådana att

$$\mathbf{X} \begin{bmatrix} 1 & a & 2 & 3 \\ 2 & b & 4 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & d & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

6. (D) Beskriv de taltripplar (x, y, z) sådana att

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

7. (D) Visa att för alla taltripplar (x, y, z) gäller

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ x+1 & y-2 & z \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1-x & 4-y & 3-z \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

8. (E) Låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ vara 3×3-matriser vars determinanter är lika med $\det(\mathbf{A}) = 4$ resp $\det(\mathbf{B}) = -2$. Bestäm

$$\det(3\mathbf{A}), \quad \det(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}), \quad \det(2\mathbf{B}^5), \quad \det((\mathbf{B}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}).$$

9. (C) Hitta två 3×3-matriser $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ vars determinanter är lika med $\det(\mathbf{A}) = 4$ resp $\det(\mathbf{B}) = -2$ och sådana att

$$\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \neq \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B}).$$

   .

10. (B) Bestäm matriser $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ sådana att $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ men $\mathbf{BA} \neq \mathbf{I}$. Då är $\mathbf{B}$ en högerinvers till $\mathbf{A}$.

11. Fler övningar finns i läroboken. Se förslag i kursPM. Träna själv eller i grupp. Övning ger färdighet.

SVAR:

1.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Multiplicera med inversen till **B**.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6a-3b-c \\ -4a+2b+c \\ 3a-b-c \end{bmatrix}$$

3.

$$\mathbf{X} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} 52 & -28 & -5 \\ -19 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Använder att en matris är inverterbar om och endast om dess determinat är skild från 0, och får då svaret $a \neq 2 \pm \sqrt{3}$.

5. $c \neq 6$.

6. Utveckling efter rad ett ger

$$x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

   dvs

$$x + y - z = 0$$

7. Använd additionslagen.

8. Vi utnyttjar att $\det(\mathbf{CD}) = \det(\mathbf{C})\det(\mathbf{D})$ och att $\det(\mathbf{C}^{-1}) = 1/\det(\mathbf{C})$ och finner då att

$$\det(3\mathbf{A}) = 27 \cdot 4 = 108, \quad \det(\mathbf{AB}^{-1}) = -2, \quad \det(2\mathbf{B}^5) = -256, \quad \det((\mathbf{BA}^T)^{-1}\mathbf{BA}) = 1.$$

9. T ex

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

10. T ex

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$