Matematiska Institutionen,
KTH

Problem till övning nr 4 den 31 januari, Linjär algebra D1, SF1604, vt 14.

1. Låt $\bar{u} = (0, 1, 2)$ och $\bar{v} = (1, -1, -2)$. Antag att $\bar{v} \times \bar{w} = (3, 1, 1)$.
   (a) (E) Bestäm
   $$\bar{u} \times \bar{v}, \qquad \bar{w} \times \bar{v}, \qquad \bar{w} \times \bar{w}, \qquad (3\bar{u} - 7\bar{w}) \times \bar{v}, \qquad \bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w})$$
   (b) (B) Räcker den givna informationen för att bestämma $(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w}$ och $\bar{w} \times (\bar{v} \times \bar{w})$.
   (c) (C) Finns det någon vektor $\bar{z}$ sådan att $\bar{v} \times \bar{z} = (2, 2, 1)$.
2. (E) Bestäm arean av den triangel som har hörn i punkterna $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 2)$ and $(1, 3, 1)$.
3. (E) Ett plan π innehåller punkterna $R = (1, 1, 1)$, $S = (2, 3, 0)$ och $T = (0, 1, 2)$. Bestäm en normal till planet π. Bestäm planets ekvation. Avgör om punkten $(3, 2, 1)$ tillhör planet. Bestäm ytterligare tre punkter i planet.
4. (E) Bestäm skärningspunkten mellan linjen genom punkterna $P = (1, 0, -1)$ och $Q = (1, 2, 4)$ och planet π i uppgift 3.
5. (C) Undersök om det går att hitta ett tal a sådant att punkterna $(2, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(-1, 2, 2)$ och $(3, 2, a)$ ligger i samma plan.
6. (B) Låt $\bar{u} = (x_1, x_2, x_3)$, $\bar{v} = (y_1, y_2, y_3)$ och $\bar{u} \times \bar{v} = (z_1, z_2, z_3)$. Visa att
   $$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$
   om och endast om vektorerna $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är parallella.
7. (E) Bestäm på parameterform skärningslinjen mellan planen med ekvationerna $2x - 3y + z = 2$ och $x - 2y + 3z = 1$.
8. (C) (ON-system) Planet π_1 har normalvektorn $\bar{n}_1 = (1, -1, 5)$ och planet π_2 har normalvektorn $\bar{n}_2 = (1, 0, 1)$. Punkten $P = (0, 2, 3)$ ligger på skärningslinjen ℓ mellan planen. Bestäm en parameterform för linjen ℓ.
9. (D) (ON-system) Bestäm projektionen av vektorerna $\bar{u} = (-2, 2, 4)$ och $\bar{w} = (1, 1, 3)$ på planet π med ekvationen
   $$2x + y - z = 0,$$
   dvs bestäm vektorer $\bar{v}$ och $\bar{z}$ som är parallella med planet π och som är sådana att $\bar{u} - \bar{v}$ resp $\bar{w} - \bar{z}$ och är vinkelräta mot planet π.
10. (C) (ON-system) Låt π vara ett plan som innehåller linjen ℓ med parameterformen
   $$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$
   vilket ju också kan skrivas $(x, y, z) = (2, -1, 3) + t(1, 2, 1)$. Planet π innehåller också punkten $P = (1, 1, 0)$. Bestäm planets ekvation samt ange parameterformen för en rät linje genom P som ligger i planet π och som är vinkelrät mot ℓ.
11. (C) (ON-system) En boll skickas från punkten $P = (2, 6, 5)$ i en sådan riktning att den efter en studs i planet π med ekvationen $x - z = -2$ träffar punkten $Q = (3, 3, 7)$. Ange på lämpligt sätt bollens riktning.
12. **Fler övningar finns i läroboken. Se förslag i kursPM. Övning ger färdighet.**

SVAR

1. $\bar{u}\times\bar{v} = (0,2,-1)$, $\bar{w}\times\bar{v} = (-3,-1,-1)$, $\bar{w}\times\bar{w} = (0,0,0)$, $(3\bar{u}-7\bar{w})\times\bar{v} = (21,13,4)$, $\bar{u}\times(\bar{v}\times\bar{w}) = (-1,6,-3)$. Den givna informationen räcker varken för att bestämma $(\bar{u}\times\bar{v})\times\bar{w}$ eller $\bar{w}\times(\bar{v}\times\bar{w})$. Finns ingen vektor $\bar{z}$ sådan att $\bar{v}\times\bar{z} = (2,1,1)$.
2. $\frac{1}{2}\sqrt{21}$
3. Normal $(1,0,1)$. Planets ekvation $(x-1)+0(y-1)+(z-1) = 0$ eller hyfsad $x+z=2$. Punkten $(3,2,1)$ tillhör inte planet. Men t ex punkterna $(2,0,0)$, $(2,7,0)$ och $(3,-13,-1)$ gör det.
4. $(1,4/5,1)$.
5. $a = 0$.
6. –
7. $(x,y,z) = (1,0,0)+t(7,5,1)$
8. $(x,y,z) = (0,2,3)+t(-1,4,1)$
9. $\bar{v} = (0,3,3)$ och $\bar{z} = (1,1,3)$.
10. Planets ekvation är $4x-y-2z = 3$.
    Sökta linjens parameterform är $(x,y,z) = (1,1,0)+t(1,-2,3)$.
11. Bollens riktning är $(1,-1,0)$.