Matematiska Institutionen,
KTH

Problem till övning nr 6 den 7 februari, Linjär algebra D1, SF1604, vt 14.

1. (E) Bestäm samtliga värden på parametern a för vilka de fyra vektorerna $(1, 1, 1, 1)$,$(1, -1, 1, -1)$, $(1, 2, 3, 4)$ och $(0, 1, -1, a)$ blir linjärt beroende. Gör en geometrisk tolkning av situationen.

2. (E) Mängden av alla 4-tipplar (x_1, x_2, x_3, x_4) som satisfierar ekvationen

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0$$

   bildar ett delrum L till R^4 som har dimension 3. Bestäm en bas $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ för L. Bestäm sedan en fjärde vektor $\bar{e}_4$ sådan att $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ och $\bar{e}_4$ bildar en bas för R^4.

3. (E) Låt $\mathbf{A}$ vara matrisen nedan

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Bestäm baser för matrisens radrum, kolonnrum och nollrum, samt bestäm matrisens rang.

4. (E) Låt $\mathbf{A}$ vara matrisen nedan

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 9 & a \\ 1 & -1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

   Bestäm för varje värde på parametern a rangen hos matrisen $\mathbf{A}$.

5. (B) För kvadratiska matrisen $\mathbf{A}$, dvs $n \times n$-matrisen $\mathbf{A}$, gäller att $\mathbf{A}$ har full rang, dvs $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$, om och endast om ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ har en unik lösning för varje högerled $\mathbf{b}$. Använd detta för att visa att om $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är kvadratiska matriser så har produkten $\mathbf{AB}$ full rang om och endast om både $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ har full rang. Visa att om $\mathbf{A}$ har full rang och $\mathbf{B}$ rang $n-1$ så har $\mathbf{AB}$ rang $n-1$. Ge exempel på två 3×3-matriser $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$, båda med rang 3, men sådana att

$$\text{rang}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 1.$$

6. (C) Visa att om för matriserna $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ gäller att $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ så är $\mathbf{B}$'s kolonnrum ett delrum till $\mathbf{A}$'s nollrum.

7. (C) Om L och M är två delrum till vektorrummet V så utgör mängden av vektorer som tillhör både L och M ett delrum till V, som betecknas $L \cap M$ och som man kallar snittet av L och M. Bestäm nu två 3-dimensionella delrum L och M till R^4 sådana att $(1, 1, 1, 1)$ tillhör $L \cap M$ samt

$$\dim(L \cap M) = 2.$$

8. Antag att L och M är delrum till vektorrumet V.
   (a) (C) Visa att snittet $L \cap M$ av L och M, (dvs mängden av de vektorer som tillhör både L och M), också är ett delrum till V.
   (b) (A) Visa att om $\dim(V) = n$, $\dim(L) = k$ och $\dim(M) = m$ så är

$$\dim(L \cap M) \geq (k + m) - n.$$

9. **Fler övningar finns i läroboken. Se förslag i kursPM. Övning ger färdighet.**

SVAR

1. $a = 0$.

2. Till exempel $\bar{e}_1 = (-4, 0, 0, 1)$, $\bar{e}_2 = (-2, 0, 1, 0)$, $\bar{e}_3 = (3, 1, 0, 0)$. Som $\bar{e}_4$ t ex $\bar{e}_4 = (1, 0, 0, 0)$

3. Bas för radrummet är t ex de två vektorerna $\bar{r} = (1 \;\; 0 \;\; -2 \;\; 1 \;\; 0)$ och $\bar{r}' = (0 \;\; 1 \;\; -3 \;\; 1 \;\; -1)$.
   Bas för kolonnrummet är t ex de två kolonnerna
   $$\bar{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \bar{k}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   Bas för nollrummet är t ex de tre vektorerna
   $$\bar{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \bar{n}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   Matrisens rang är 2.

4. Rangen är 3 när $a = 0$ eller $a = 4$. För övrigt är rangen 4.

5. –

6. –

7. Flera möjliga svar, t ex
   $$L = \text{span}\{(1,1,1,1),(1,0,0,0),(0,0,1,0)\}, \quad M = \text{span}\{(1,1,1,1),(1,0,0,0),(0,0,0,1)\}$$

8. –