Matematiska Institutionen, KTH

Lösning av tentamensskrivning på kursen Linjär algebra, SF1604, för CDATE, CTFYS och vissa CL, tisdagen den 20 maj 2014 kl 08.00-13.00.

Examinator: Olof Heden.

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Bonuspoäng förvärvade under läsåret 2013-2014 får användas. Den som har b bonuspoäng får använda högst fem av dessa poäng för att uppnå maximalt 15 poäng på del I. Till poängsumman på del II och del III adderas sedan det största av talen $b-5$ och 0.

För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 40p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
20	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
25	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
30	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
35	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

DEL I

1. Låt $\mathbf{A}$ beteckna matrisen nedan:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 13 & 30 \\ -5 & -12 \end{pmatrix}$$

(a) (3p) Bestäm $\mathbf{A}$:s samtliga egenvärden och samtliga tillhörande egenvektorer.

Lösning. Karakteristiska ekvationen

$$0 = \begin{vmatrix} 13-\lambda & 30 \\ -5 & -12-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 6$$

har rötterna $\lambda = -2$ och $\lambda = 3$, vilka utgör matrisens egenvärden. Det homogena ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 13-\lambda & 30 \\ -5 & -12-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

har för $\lambda = -2$ lösningen $(x, y) = t(2, -1)$, och har för $\lambda = 3$ lösningen $(x, y) = t(3, -1)$. Därmed

SVAR: Till egenvärdet -2 hör egenvektorerna $(x, y) = t(2, 1)$ och till egenvärdet 3 hör egenvektorerna $(x, y) = t(3, 1)$, där $t \in R$.

(b) (2p) Bestäm en diagonalmatris $\mathbf{D}$ och matriser $\mathbf{B}$ och $\mathbf{C}$ sådana att $\mathbf{A} = \mathbf{BDC}$.

Lösning. Vi vet att diagonalelementen i $\mathbf{D}$ är $\mathbf{A}$:s egenvärden, att kolonnerna i $\mathbf{B}$ utgör en bas av egenvektorer (i en ordning svarande mot kolonnerna i $\mathbf{D}$), och vi vet att $\mathbf{C} = \mathbf{B^{-1}}$. Således (till exempel)

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. (4p) Den linjära avbildningen A från R^4 till R^3 definieras genom

$$\begin{aligned} A(1,1,1,1)&=(1,2,1)\\ A(0,1,1,1)&=(2,4,2)\\ A(0,0,1,1)&=(1,2,3)\\ A(0,0,0,1)&=(2,4,a) \end{aligned}$$

Bestäm avbildningens matris relativt standardbaserna i R^3 och R^4. Bestäm också, för samtliga värden på talet a, en bas för avbildningens kärna samt dimensionen hos A:s bildrum.

Lösning. Martins metod ger

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1&1&1&1&1&2&1\\ 0&1&1&1&2&4&2\\ 0&0&1&1&1&2&3\\ 0&0&0&1&2&4&a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1&0&0&0&-1&-2&-1\\ 0&1&1&1&2&4&2\\ 0&0&1&1&1&2&3\\ 0&0&0&1&2&4&a \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1&0&0&0&-1&-2&-1\\ 0&1&0&0&1&2&-1\\ 0&0&1&1&1&2&3\\ 0&0&0&1&2&4&a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1&0&0&0&-1&-2&-1\\ 0&1&0&0&1&2&-1\\ 0&0&1&0&-1&-2&3-a\\ 0&0&0&1&2&4&a \end{array}\right)$$

varur vi finner avbildningens matris relativt standardbaserna:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1&1&-1&2\\ -2&2&-2&4\\ -1&-1&3-a&a \end{pmatrix}$$

Vi fortsätter att använda Martins uppställning för att söka en bas for nollrummet och dimensionen av bildrummet:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1&1&1&1&1&2&1\\ 0&1&1&1&2&4&2\\ 0&0&1&1&1&2&3\\ 0&0&0&1&2&4&a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1&1&1&1&1&2&1\\ -2&-1&-1&-1&0&0&0\\ -1&-1&0&0&0&0&2\\ -2&-2&-2&-1&0&0&a-2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1&1&1&1&1&2&1\\ -2&-1&-1&-1&0&0&0\\ -1&-1&0&0&0&0&2\\ \frac{a-2}{2}-2&\frac{a-2}{2}-2&-2&-1&0&0&0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1&1&1&1&1&2&1\\ 2&1&1&1&0&0&0\\ -1&-1&0&0&0&0&2\\ 6-a&6-a&4&2&0&0&0 \end{array}\right)$$

Vi finner att en bas för nollrummet ges av de generatorer för nollrummet som anges nedan

$$\mathrm{N}(A) = \mathrm{Span}\{\,(2,1,1,1)\,,\,(6-a,6-a,4,2)\,\}$$

och att dimension för bildrummet är 2 för alla värden på a.

3. (ON-system) Låt ℓ beteckna linjen med parameterformen

$$\ell : (x,y,z) = (1,1,1) + t(0,1,-1),$$

och låt P och Q beteckna punkterna med koordinaterna

$$P = (1,2,3) \qquad \text{resp} \qquad Q = (3,2,1).$$

(a) (2p) Bestäm ekvationen för det plan π som innehåller linjen ℓ och punkten P.

Lösning. Punkten $R = (1, 1, 1)$ och punkten P tillhör planet, så vektorn $\bar{u} = \overline{RP} = (0, 1, 2)$ är parallell med π liksom linjen ℓ:s riktningsvektor $\bar{v} = (0, 1, -1)$. En normal till planet π blir då

$$\bar{n} = \bar{u} \times \bar{v} = (0, 1, 2) \times (0, 1, 1) = (-1, 0, 0).$$

Planets ekvation blir då $x - 1 = 0$, eller förenklat $x = 1$.

(b) (2p) Bestäm avståndet från punkten Q till planet π.

Lösning. Punkten $P = (3, 2, 1)$ ligger i planet π_0 med ekvationen $x = 3$, och som är parallellt med planet π. Eftersom bägge planen är parallella med yz-planet så är avståndet mellan dessa plan lika med $3 - 1$, vilket då också blir punkten P:s avstånd till planet π.

SVAR: 2.

(c) (2p) Bestäm ekvationen för ett plan π' som innehåller linjen ℓ och som har samma avstånd till P som till Q.

Lösning. Det sökta planet skär linjen mellan punkterna P och Q i en punkt T sådan att $\overline{PT} = \overline{TQ}$. Vi får

$$\overline{PQ} = (2, 0, -2) \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{PT} = (1, 0, -1) \qquad \Longrightarrow \qquad T = (2, 2, 2)$$

Då blir den med π' parallella vektorn $\overline{RT} = (1, 1, 1)$. En normal till π' är då

$$\bar{n}' = (1, 1, 1) \times (0, 1, 1) = (0, -1, 1),$$

varur ekvationen för sökta planet π' fås till

$$0(x - 1) - (y - 1) + (z - 1) = 0 \qquad \text{eller} \qquad y = z.$$

DEL II

4. (a) (2p) Låt talföljden a_0, a_1, ... definieras av att $a_0 = 2$ och $a_1 = 1$ samt att

$$a_{n+2} = 4^n + (-3)^n, \quad \text{för} \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ge ett induktionsbevis för att $a_n = 4^n + (-3)^n$ för $n = 0, 1, \ldots$.

Lösning. Sätt $b_n = 4^n + (-3)^n$. Vi skall visa att $a_n = b_n$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$. Vi konstaterar först att

$$b_0 = 1 + 1 = a_0 \qquad \text{och} \qquad b_1 = 4 - 3 = a_1.$$

Återstår att verifiera det så kallade induktionssteget, dvs implikationen

$$\begin{cases} a_{n+1} &= b_{n+1} \\ a_n &= b_n \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad a_{n+2} = b_{n+2}.$$

Vi får nu

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 12a_n = \{\text{om } a_{n+1} = b_{n+1} \text{ och } a_n = b_n\} =$$

$$= b_{n+1} + 12b_n = 4^{n+1} + (-3)^{n+1} + 12(4^n + (-3)^n) =$$

$$= (4+12)4^n + (-3+12)(-3)^n = 4^{n+2} + (-3)^{n+2} = b_{n+2}.$$

Induktionsprincipen ger nu att $a_n = b_n$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(b) (2p) Ange på formen $a + ib$ (dvs inte på polär form) minst sex av rötterna till ekvationen $z^{24} = 1$.

Lösning. Mer eller mindre trivialt gäller att talen 1, -1, i och $-i$ satisfierar den givna ekvationen. deMoivres formel ger

$$z = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3) \quad \Rightarrow \quad z^6 = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1 \quad \Rightarrow \quad z^{24} = 1.$$

Eftersom $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ och $\cos(\pi/3) = 1/2$ har vi nu en femte rot till givna ekvationen, nämligen $(1+i\sqrt{3})/2$. Ekvationen har reella koefficienter och alltså är också rötters konjugerade komplexa tal rötter till ekvationen. Vi får då
SVAR: T ex $1, -1, i, -i, (1+i\sqrt{3})/2$ och $(1-i\sqrt{3})/2$

(c) (2p) Är det sant att om två av rötterna till en binomisk ekvationen $z^n = a$ är rent imaginära så måste talet a vara reellt? Motivera ditt svar!

Lösning. Rötterna till en binomisk ekvation $z^n = a$ utgör hörnen i en regelbunden n-hörning i komplexa talplanet och ligger samtliga på en cirkel med radien r, där $r^n = |a|$. Låt de två rent imaginära rötterna vara ip och $-iq$ där p och q är positiva reella tal. Då gäller att

$$a = i^n p^n = (-i)^n q^n = (-1)^n i^n q^n,$$

och vi ser att n måste vara ett jämnt tal, (samt att $p = q$ förståss), eftersom $(-1)^n = 1$ om och endast om n är ett jämnt tal. Men då ger ekvationen ovan också att a är ett reellt tal, eftersom $i^n = \pm 1$ om n är jämnt.
SVAR: Ja det är sant.

5. Betrakta vektorrummet $\mathcal{P}$ bestående av alla polynom med reella koefficienter. Låt $\mathcal{P}_2$ beteckna delrummet bestående av polynom av grad högst två. Vi inför en inreprodukt $\langle\, p(t) \mid q(t) \rangle$ i rummet $\mathcal{P}$ genom

$$\langle\, p(t) \;\mid\; q(t)\, \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\, \mathrm{dt}\,,$$

och definierar avståndet mellan två polynom $p(t)$ och $q(t)$ genom

$$||\, p(t) - q(t)\, || = \sqrt{\langle\, p(t) - q(t) \mid p(t) - q(t)\, \rangle}\,.$$

(a) (1p) Bestäm avståndet mellan polynomen $p(t) = 1 - 3t^2$ och t^3.

Lösning. Enligt formeln ovan är avståndet

$$||1 - 3t^2 - t^3|| = \sqrt{\int_{-1}^{1} (1 - 3t^2 - t^3)^2 \text{ dt}}$$

Integralberäkning nedan:

$$\int_{-1}^{1} (1-3t^2-t^3)^2 \text{ dt } = \int_{-1}^{1} 1+9t^4+t^6-6t^2-2t^3+6t^5 \text{ dt } = 2+\frac{18}{5}+\frac{2}{7}-4 = \frac{66}{35}.$$

SVAR: $\sqrt{66/35}$.

(b) (3p) Undersök om polynomet $p(t)$ ovan är det polynom i $\mathcal{P}_2$ som ligger närmast polynomet t^3.

Lösning. Om så vore skulle vektorn $p(t) - q^3$ vara ortogonal mot varje vektor i $\mathcal{P}_2$. Vi finner att

$$\langle\, t \mid p(t) - t^3 \,\rangle = \int_{-1}^{1} t(1 - 3t^2 - t^3) \text{ dt } = \int_{-1}^{1} t - 3t^3 - t^4 \text{ dt } = -\frac{2}{5} \neq 0,$$

så polynomet t i $\mathcal{P}_2$ är inte ortogonal mot polynomet $p(t) - q^3$.
SVAR: Nej, $p(t)$ är inte det polynom i $\mathcal{P}_2$ som ligger närmast t^3.

6. (5p) Antag att 3×3-matrisen $\mathbf{A}$ har egenvärdena 1, -1 och 5. Visa att det finns ett 2-dimensionellt delrum π i $\mathbb{R}^3$ sådant

$$(x_1, x_2, x_3) \in \pi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{A}^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(**OBS** Motivera noggrant, avsaknad av korrekt argumentering resulterar i poängavdrag.)

Lösning. Låt $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ och $\bar{e}_3$ vara egenvektorer hörande till egenvärdena $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ och $\lambda_3 = 5$. Dessa vektorer är linjärt oberoende eftersom de hör till olika egenvärden. Vi finner också att

$$\mathbf{A}^2\bar{e}_i = \mathbf{A}\mathbf{A}\bar{e}_i = \mathbf{A}\lambda_i\bar{e}_i = \lambda_i\mathbf{A}\bar{e}_i = \lambda_i^2\bar{e}_i.$$

Alltså är $\bar{e}_1$ och $\bar{e}_2$ egenvektorer till $\mathbf{A}^2$ hörande till egenvärdet $\mu = 1 = (-1)^2$. Matrisen $\mathbf{A}^2$ har då ett egenrum

$$\mathrm{E}_1 = \mathrm{Span}\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$$

av dimension 2. Varje vektor $\bar{u} \in \mathrm{E}_1$ har egenskapen

$$\bar{u} \in \mathrm{E}_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{A}^2\bar{u} = \mu\bar{u} = \bar{u}.$$

Vi låter $\pi = \mathrm{E}_1$.

DEL III (Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.)

7. Betrakta i $\mathbb{R}^3$ de tre linjerna

$$\begin{aligned}
\ell_1 &: (x,y,z) = (4,-2,4) + t\,(0,1,1)\\
\ell_2 &: (x,y,z) = (2,-3,1) + t\,(3,1,1)\\
\ell_3 &: (x,y,z) = (0,-3,11) + t\,(1,1,-1)
\end{aligned}$$

(a) (2p) Bestäm en linje ℓ som skär alla tre linjerna ovan.

Lösning. Vi betraktar det plan π som innehåller linjen ℓ_1 samt punkten $P = (2,-3,1)$ på linjen ℓ_2. Vektorn mellan punkten P och punkten $Q = (4,-2,4)$ på linjen ℓ_1, dvs vektorn $\overline{PQ} = (2,1,3)$, och linjen ℓ_1:s riktningsvektor ger en normalvektor till π:

$$\bar{n} = (0,1,1) \times (2,1,3) = (2,2,-2).$$

Så planet π:s ekvation är

$$2(x-2) + 2(y+3) - 2(z-1) = 0 \qquad \text{dvs} \qquad x + y - z = -2.$$

Linjen ℓ_3:s skärningspunkt R med π bestäms på sedvanligt sätt:

$$t + (-3+t) - (11-t) = -2 \qquad \Longrightarrow \qquad 3t = 12 \qquad \Longrightarrow \qquad t = 4.$$

Så $R = (4,-7,7)$. Räta linjen ℓ genom P och R har riktningsvektorn $\bar{v} = (2,-4,6)$ och är inte parallell med linjen ℓ_1 i planet π, och skär därför linjen ℓ_1. Från konstruktionen följer att ℓ skär linjen ℓ_2 (i pinkten P) och skär linjen ℓ_3 (i punkten R). Uppgiften är nu löst och vi har

SVAR: T ex linjen $\ell = (2,-3,1) + t(2,-4,6)$.

(b) (1p) Det finns oändligt många linjer som skär de tre givna linjerna ovan. Förklara varför två av dessa oändligt många linjer inte kan skära varandra.

Lösning Antag de bägge linjerna ℓ och ℓ' skär varandra i en punkt P samt skär de tre givna linjerna. Då skulle de tre givna linjerna samtliga ligga i det plan som innehåller punkten P och linjerna ℓ och ℓ'. Men de tre givna linjernas riktningsvektorer är linjärt oberoende t ex eftersom

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

och ligger då ej i samma plan.

(c) (2p) Vad krävs av tre linjer ℓ_1, ℓ_2 och ℓ_3 för att det skall finnas minst en linje ℓ som skär alla tre linjerna.

Lösning. Om två (eller alla tre linjerna) skär varandra i en punkt P kan vi helt enkelt dra en rät linje från punkten P till den tredje linjen. Så antag att inga av linjerna skär varandra. I fallet att två av de tre linjerna är parallella och π är det plan som innehåller de två parallella linjerna och den tredje linjen är parallell med π, men inte tillhör π så finns ingen linje som skär alla tre linjerna. I samtliga övriga fall kan, med samma metod som användes i lösningen av deluppgift (a), en linje konstrueras som skär alla tre linjerna.

8. (5p) Under vilka förutsättningar på matriserna **A** och **B** gäller att en matrisekvation

$$\mathbf{AXA} = \mathbf{B}$$

has oändligt många lösningar **X**.

Lösning. Vi konstaterar först att om **A** är inverterbar finns en och endast en lösning: $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$. Så vi antar i fortsättningen att **A** inte är inverterbar.

Om **A** är en $n \times m$-matris så måste **B** vara en $n \times m$-matris, och **X** en $m \times n$-matris, annars är inte matrismultiplikationerna definierade. Nedan betraktar vi och behandlar de inblandade matriserna som de linjära avbildningar de representerar. Vi låter $r = \text{rang}(\mathbf{B})$ och $k = \dim(\ker(\mathbf{A}))$, dvs r betecknar matrisen **B**:s rang och k betecknar dimensionen av **A**:s nollrum.

Vi ger först två nödvändiga villkor för att det skall finnas minst en lösning **X** till en given matrisekvation $\mathbf{AXA} = \mathbf{B}$:

Vi observerar

$$\mathbf{A}\bar{v} = \bar{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{AXA}\bar{v} = \bar{0} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{B}\bar{v} = \bar{0}.$$

Alltså måste **A**:s nollrum vara innehållet i **B**:s nollrum. Vidare

$$\bar{u} = \mathbf{B}\bar{v} \qquad \Longrightarrow \qquad \bar{u} = \mathbf{A}(\mathbf{XA}\bar{v}),$$

varur vi kan sluta att **A**:s bildrum omfattar **B**:s bildrum.

Vi visar nu att dessa två villkor också är tillräckliga för existensen av minst en lösning. Så nedan antar vi att $R(\mathbf{B}) \subseteq R(\mathbf{A})$ och $\ker(\mathbf{A}) \subseteq \ker(\mathbf{B})$

Låt $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_r$ vara en bas för **B**:s bildrum $R(\mathbf{B})$ och antag att $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_r$ är sådana att $\mathbf{B}\bar{e}_i = \bar{f}_i$, för $i = 1, 2, \ldots, r$. Vektorerna $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_r$ är linjärt oberoende, ty de måste enligt dimensionssatsen spänna upp ett rum av en dimension minst lika med dimensionen hos det rum som spänns upp av $\bar{f}_1, ..., \bar{f}_r$. Vi utvidgar mängden vektorer $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_r$ till en bas $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ för R^n så att $\mathbf{B}\bar{e}_i = \bar{0}$, för $i = r+1, \ldots, n-k$ och $\mathbf{A}\bar{e}_i = \bar{0}$ för $i = n-k+1, \ldots, n$. Då är

$$\ker(\mathbf{B}) = \text{Span}\{\bar{e}_{r+1}, \ldots, \bar{e}_n\}.$$

och

$$\ker(\mathbf{A}) = \text{Span}\{\bar{e}_{n-k+1}, \ldots, \bar{e}_n\}$$

om $k > 0$.

Låt $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_r$ vara vektorer sådana att $\mathbf{A}\bar{g}_i = \bar{f}_i$, för $i = 1, 2, \ldots, r$. Dessa r stycken vektorer finns eftersom **A**:s bildrum omfattar **B**:s bildrum. Då gäller för $i = 1, 2, \ldots, r$ att

$$\bar{x}_i \in (\bar{g}_i + \ker(\mathbf{A})) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{A}\bar{x}_i = \bar{f}_i \qquad (1)$$

Låt $\bar{h}_i = \mathbf{A}\bar{e}_i$, för $i = 1, 2, \ldots, n-k$. Vektorerna $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \ldots, \bar{h}_{n-k}$ är linjärt oberoende, ty

$$\lambda_1\bar{h}_1 + \cdots + \lambda_{n-k}\bar{h}_{n-k} = \bar{0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1\mathbf{A}\bar{e}_1 + \cdots + \lambda_{n-k}\mathbf{A}\bar{e}_{n-k} = \bar{0} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{A}(\lambda_1\bar{e}_1 + \cdots + \lambda_{n-k}\bar{e}_{n-k}) = \bar{0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1\bar{e}_1 + \cdots + \lambda_{n-k}\bar{e}_{n-k} \in \ker(\mathbf{A})$$

och därmed

$$\lambda_1\bar{e}_1 + \cdots + \lambda_{n-k}\bar{e}_{n-k} = \lambda_{n-k+1}\bar{e}_{n-k+1} + \cdots + \lambda_n\bar{e}_n.$$

vilket strider mot antagandet att $\bar{e}_1$, ..., $\bar{e}_n$ bildar en bas för R^n.

Vi utvidgar nu de $n-k$ linjärt oberoende vektorerna $\bar{h}_1$, ..., $\bar{h}_{n-k}$ till en bas $\bar{h}_1$, ..., $\bar{h}_{n-k}$, $\bar{h}_{n-k+1}$, ..., $\bar{h}_m$ för R^m.

Nu kan vi definiera en oändlig uppsättning matriser $\mathbf{X}$ som löser matrisekvationen $\mathbf{AXA} = \mathbf{B}$. Vi betraktar två olika fall.

Fall 1: $k \neq 0$.

Låt

$$\mathbf{X}\bar{h}_i = \begin{cases} x_i \in \bar{(}g_i + \ker(\mathbf{A})) & \text{om} \quad i = 1, 2, \ldots, r \\ \bar{0} & \text{om} \quad i = r+1, \ldots, m \end{cases}$$

Avbildningen $\mathbf{X}$ är nu definierad på en bas för R^m är därmed väldefinierad. Vi finner att för $i = 1, 2, \ldots, r$ så är

$$\mathbf{AXA}\bar{e}_i = \mathbf{AX}(\mathbf{A}\bar{e}_i) = \mathbf{AX}\bar{h}_i = \mathbf{A}(\mathbf{X}\bar{h}_i) = \mathbf{A}\bar{x}_i = \bar{f}_i = \mathbf{B}\bar{e}_i,$$

och med liknanade räkningar att

$$\mathbf{AXA}\bar{e}_i = \mathbf{0} = \mathbf{B\bar{e}_i}$$

då $i = r+1, \ldots, n$. Alltså gäller

$$\mathbf{AXA}\bar{e}_i = \mathbf{B}\bar{e}_i$$

för $i = 1, \ldots, n$, och därav följer att $\mathbf{AXA} = \mathbf{B}$. Det finns oändligt många vektorer att välja från mängden $\bar{g}_i + \ker(\mathbf{A})$, för $i = 1, 2, \ldots, r$, och därmed oändligt många möjligheter för $\mathbf{X}\bar{h}_i$.

Fall 2: $k = 0$. Om $n = m$ vore $\mathbf{A}$ inverterbar, så eftersom vi från början antagit att $\mathbf{A}$ inte är inverterbar, kan vi anta att $m > n$.

Vi definierar nu $\mathbf{X}$ genom

$$\mathbf{X}\bar{h}_i = \begin{cases} g_i & \text{om} \quad i = 1, 2, \ldots, r \\ \bar{0} & \text{om} \quad i = r+1, \ldots, n \\ \bar{y}_i & \text{om} \quad i > n \end{cases}$$

där $\bar{y}_i$, för $i > n$ är en godtycklig vektor i R^n. Som ovan verifierar vi att $\mathbf{AXA} = \mathbf{B}$ även i detta fall. Eftersom det finns oändligt många vektorer $\bar{y}_m$ att välja på finns det också oändligt många matriser $\mathbf{X}$ som löser matrisekvationen också i detta fall.