Matematiska Institutionen, KTH

Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra, SF1604, den 14 mars 2014 kl 08.00-13.00.

Examinator: Olof Heden.

OBS: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Bonuspoäng förvärvade under läsåret 2013-2014 får användas. Den som har b bonuspoäng får använda högst fem av dessa poäng för att uppnå maximalt 15 poäng på del I. Till poängsumman på del II och del III adderas sedan det största av talen $b-5$ och 0.

För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 40p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
20	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
25	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
30	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
35	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

DEL I

1. (ON-system) Låt $\bar{u} = (1, 2, 3)$ och $\bar{v} = (0, 1, 1)$ vara två vektorer i R^3

   (a) (3p) Bestäm längden av vektorn $\bar{u}$, cosinus för vinkeln mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$, samt minst en vektor vars längd är 1 och vars riktning är vinkelrät mot både $\bar{u}$ och $\bar{v}$.

   Lösning.
$$||\bar{u}|| = \sqrt{1^2 + 2^3 + 3^3} = \sqrt{14}.$$
$$\cos(\theta) = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{||\bar{u}|| \cdot ||\bar{v}||} = \frac{5}{\sqrt{14}\sqrt{2}}.$$
   En vektor vinkelrät mot både $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är t ex
$$\bar{u} \times \bar{v} = (1, 2, 3) \times (0, 1, 1) = (-1, -1, 1)$$
   vars längd är lika med $\sqrt{3}$, så en vektor av längd 1 vinkelrät mot både $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är t ex
$$\frac{1}{||(-1, -1, 1)||}(-1, -1, 1) = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

   (b) (2p) Betrakta planet π som innehåller punkten $(1, 2, -1)$ och som är parallellt med vektorerna $\bar{u}$ och $\bar{v}$. Bestäm det (eller de) reella tal a för vilket punkter med koordinaterna $(3, 5, a)$ ligger i planet π.

   Lösning. En normal till det givna planet är t ex $(-1, -1, 1)$ så planets ekvation är
$$-(x-1) - (y-2) + (z+1) = 0 \qquad \text{dvs} \qquad -x - y + z = -4.$$

En punkt $(3, 5, a)$ tillhör då planet om

$$-3 - 5 + a = -4$$

Så

SVAR: $a = 4$.

2. Låt a vara ett reellt tal och låt$\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ beteckna nedanstående matriser:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

(a) (2p) Bestäm matrisen $\mathbf{A}$:s invers $\mathbf{A}^{-1}$.

Lösning. Vi beräknar inversen enligt nedanstående algoritm:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

SVAR:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -5 \\ -4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) (1p) Bestäm, för varje värde på a, en matris $\mathbf{X}$ sådan att $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$.

Lösning.

$$\mathbf{X} = \mathbf{BA}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 3 & -5 \\ -4 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4+a & 1+a & -2-a \end{pmatrix}$$

(c) (2p) Undersök för vilka värden på det reella talet a det finns en matris $\mathbf{Y}$ sådan att $\mathbf{A} = \mathbf{BY}$.

Lösning. Om $\det(\mathbf{B}) \neq 0$ är $\mathbf{B}$ inverterbar och $\mathbf{Y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ löser den givna ekvationen. Eftersom $\mathbf{A}$ är inverterbar så är $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ och vi skulle ha en ekvation

$$0 \neq \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{Y})\det(\mathbf{B}).$$

Så om $\det(\mathbf{B}) = 0$ finns ingen lösning till givna ekvationen.

Vi beräknar $\mathbf{B}$:s determinant:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3-a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3-a \end{vmatrix} = 3 - a - 1 = 2 - a.$$

SVAR: $a \neq 2$

3. (5p) Låt $\mathbf{A}$ beteckna matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

Bestäm en diagonalmatris $\mathbf{D}$ och en matris $\mathbf{B}$ sådana att $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}$.

Lösning. De sökta matriserna fås med hjälp av $\mathbf{A}$:s egenvärden och tillhörande egenvektorer. Så vi söker nu $\mathbf{A}$:s egenvärden och egenvektorer med sedvanliga metoder.

Egenvärden är rötter till ekvationen

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 5-\lambda & -5 \\ 1 & -5 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)[(5-\lambda)^2 - 5^2] = (1-\lambda)(5-\lambda-5)(5-\lambda+5).$$

Matrisens egenvärden är alltså $\lambda = 1$, $\lambda = 0$ och $\lambda = 10$.

Nu till egenrummen:

$\lambda = 1$. Egenvektorer hörande till detta egevärde satisfierar systemet

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -5 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Med hjälp av Gausselimination får vi egenrummet $E_1 = \operatorname{span}\{(1,1,1)\}$.

$\lambda = 0$. Egenvektorer hörande till detta egevärde satisfierar systemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Med hjälp av Gausselimination får vi egenrummet $E_0 = \operatorname{span}\{(0,1,1)\}$.

$\lambda = 10$. Egenvektorer hörande till detta egevärde satisfierar systemet

$$\begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -5 \\ 1 & -5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Med hjälp av Gausselimination får vi egenrummet $E_{10} = \operatorname{span}\{(0,1,-1)\}$.

Diagonalelementen i matrisen $\mathbf{D}$ utgöres av egenvärdena och kolonnerna i $\mathbf{B}$ av en bas av egenvektorer, i samma ordning som de tillhörande egenvärdena uppträder i $\mathbf{D}$. Alltså

SVAR: Till exempel

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

DEL II

4. Låt a vara ett reellt tal och låt A beteckna den linjära avbildning från R^3 till R^5 som definieras av

$$A(1,1,1) = (1,1,2,1,3), \quad A(1,2,3) = (1,2,2,2,-1), \quad A(0,1,1) = (2,3,4,3,a).$$

(a) (2p) Bestäm en bas för A:s kärna $\ker(A)$ när $a = 1$ och när $a = 2$.

Lösning. Vi studerar situationen med hjälp av Martins metod:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & a-6 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \\ -2 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 \end{array}\right)$$

Radvektorerna till höger om strecket genererar bildrummet $\mathrm{Im}(A)$, och dessa rader i sluttablån är linjärt oberoende när $a \neq 2$ och de två första raderna när $a = 2$.

Vi resonerar nu med hjälp av fundamentalsatsen. Om $a \neq 2$ är $\dim(\mathrm{Im}(A)) = 3$ och då är $\dim(\ker(A)) = 3-3 = 0$ och om $a = 2$ får vi $\dim(\ker(A)) = 3-2 = 1$. Ur "Martins" sluttablå ser vi att $A(-2,-2,-3) = (0,0,0,0,0)$ när $a = 2$.

SVAR: En bas för $\ker(A)$ när $a = 2$ är $(2,2,3)$, när $a = 1$ är A:s kärna trivial.

(b) (2p) Om $a = 1$ finns linjära avbildningar B från R^5 till R^3 sådana att $B \circ A\bar{x} = \bar{x}$ för varje vektor $\bar{x}$ i R^3. Bestäm två olika sådan linjära avbildningar B.

Lösning. När $a = 1$ utgör, enligt sluttalblån ovan, vektorerna

$$\bar{f}_1 = (1,1,2,1,3), \quad \bar{f}_2 = (0,1,0,1,-4), \quad \bar{f}_3 = (0,0,0,0,a-2)$$

en bas för $\mathrm{Im}(A)$. Vi utvidgar med ytterligare två vektorer $\bar{f}_4$ och $\bar{f}_5$ till en bas för R^5, t ex

$$\bar{f}_4 = (0,0,1,0,0), \qquad \bar{f}_5 = (0,0,0,1,0).$$

Vi definierar nu B genom

$$B\bar{f}_1 = (1,1,1), \quad B\bar{f}_2 = (0,1,2), \quad B\bar{f}_3 = (-2,-2,-3)$$

vilket garanterar att $B \circ A\bar{x} = \bar{x}$ för alla $\bar{x} \in R^3$, samt låter sedan $B\bar{f}_4$ och $B\bar{f}_5$ vara två godtyckliga vektorer i R^3, t ex $(0,0,0)$ och $(1,0,0)$, eller $(\pi, e, 0)$ och $(\pi, e, 0)$.

(c) (2p) För vilka värden på a är A injektiv (dvs "ett till ett" eller 1-1). För vilka värden på a är A en inverterbar linjär avbildning.

Lösning. A är injektiv om och endast om dess kärna är trivial, dvs precis då $a \neq 2$. En avbildning är inverterbara om och endast om den är både injektiv och surjektiv, så den givna avnildningen är inte inverterbar för något värde på talet a.

5. (5p) Betrakta i R^4 lösningsmängderna Π_1 och Π_2 till systemen

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -2 \end{array}\right. \quad \text{resp} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \end{array}\right.$$

(a) (2p) Bestäm Π_1, dvs bestäm samtliga lösningar till det vänstra systemet ovan.

Lösning. Räkning i tablåer ger

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

Låt $x_4 = 3t$ and $x_1 = 3s$. Vi får då

$$x_2 = 1 - t - 2s, \qquad x_3 = x_1 + x_2 + 2x_4 + 2 = s + (1 - t - 2s) + 2t + 2$$

dvs

SVAR:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 3, 0) + t(0, -1, 5, 3) + s(3, -2, 1, 0)$$

men det finns också andra beskrivningar av samma lösningsmïgd.

(b) (3p) (ON-system) Bestäm avståndet mellan Π_1 och Π_2.

Lösning. Avståndet mellan lösningsmängderna är längden av en vektor som är vinkelrät mot bägge lösningsmängderna, och som ”börjar” och ”slutar” i lösningsmängderna. Liksom för normaler till plan inses att de vektorer som är vinkelräta mot Π_1 och Π_2 tillhör

$$N = \text{Span}\{(1, 2, 1, -1), (1, 1, -1, 2)\}.$$

(Mer precis argumentering på denna punkt krävs inte för full poäng på uppgiften.)

Om P_1 och P_2 är punkter i Π_1 resp Π_2 så ges det sökta avståndet av längden av vektorn P_1P_2:s projektion på N. Vi hittar, t ex,

$$P_1 = (0, 1, 3, 0) \in \Pi_1 \qquad P_2 = (0, 1, -2, 0) \in \Pi_2, \qquad P_1P_2 = (0, 0, -5, 0).$$

Eftersom de angivna generatorerna för N är ortogonala får vi

$$\text{Proj}_N(P_1P_2) = \frac{(1, 2, 1, -1) \cdot (0, 0, -5, 0)}{(1, 2, 1, -1) \cdot (1, 2, 1, -1)}(1, 2, 1, -1) + \frac{(1, 1, -1, 2) \cdot (0, 0, -5, 0)}{(1, 1, -1, 2) \cdot (1, 1, -1, 2)}(1, 1, -1,$$

$$= \frac{-5}{7}(1, 2, 1, -1) + \frac{5}{7}(1, 1, -1, 2) = \frac{5}{7}(0, -1, -2, 3),$$

en vektor vars längd är

SVAR: $5\sqrt{14}/7$.

6. (4p) Finns det någon symmetrisk 3×3-matris $\mathbf{A}$ sådan att $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ och

$$(3\ \ 5\ \ 2)\mathbf{A} = (1\ \ 4\ \ 1).$$

(**OBS.** Ett svar med enbart antingen "ja" eller "nej" utan en korrekt motivering ger inga poäng.)

Lösning. Vi finner, eftersom $\mathbf{A}$ är symmetrisk, att de givna villkoren ger följande likheter

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{A} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alltså är $(1\ \ 4\ \ 1)^T$ en egenvektor till $\mathbf{A}$ hörande till egenvärdet $\lambda = 1$. Vidare får vi då också att

$$\mathbf{A}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vilket ger att $\lambda = 0$ är ett egenvärde till $\mathbf{A}$ med egenvektorn

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

För symmetriska matriser gäller att egenvektorer hörande till skilda egenvärden är ortogonala. Då $(2, 1, 1)$ och $(1, 4, 1)$ inte är ortogonala kan en matris $\mathbf{A}$ med givna indata inte existera.

SVAR: Nej.

DEL III (Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.)

7. (ON-system) Låt π_1 beteckna mängden av 3-tipplar $(x_1\ \ x_2\ \ x_3)$ sådana att $x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3$ och låt π_2 beteckna mängden av 3-tipplar $(x_1\ \ x_2\ \ x_3)$ sådana att $3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7$.

   (a) (1p) Bestäm en matris $\mathbf{B}$ sådan att

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \in \pi_1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \mathbf{B}^T \in \pi_2 \qquad (1)$$

Lösning. Vi observerar att (x_1, x_2, x_3) tillhör π_1 precis då

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, -1, 0) + t(2, 1, 0) + s(0, 2, 1)$$

för några tal t och s, eftersom punkten $(1, -1, 0)$ tillhör π_1 och vektorerna $(2, 1, 0)$ och $(0, 2, 1)$ är ortogonala mot planets normal $\bar{n} = (1, -2, 4)$, och därmed parallella med π_1.

Likaledes har vi att (x_1, x_2, x_3) tillhör π_2 precis då

$$(x_1, x_2, x_3) = (2, -1, 0) + t(1, 3, 0) + s(0, 2, 1)$$

för några tal t och s.
Vi definierar nu en linjär avbildning B genom

$$B(1, -1, 0) = (2, -1, 0), \qquad B(2, 1, 0) = (1, 3, 0), \qquad B(0, 2, 1) = (0, 2, 1)$$

Då gäller

$$B((1, -1, 0) + t(2, 1, 0) + s(0, 2, 1)) = B(1, -1, 0) + tB(2, 1, 0) + sB(0, 2, 1) =$$

$$= (2, -1, 0) + t(1, 3, 0) + s(0, 2, 1)$$

dvs punkter i π_1 avbildas på punkter i π_2 (och vice versa, om avbildningen visar sig vara inverterbar). Vi bestämmer nu avbildningens matris relativt standardbasen med hjälp av Martins metod:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5/3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4/3 & 1 \end{array}\right)$$

SVAR: Till exempel

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2/3 & 5/3 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) (2p) Undersök om det finns någon ortogonalmatris **B** med ovanstående egenskap.

Lösning. Vi utnyttjar att multiplikation av vektorer med en ortogonalmatris inte förändrar vektorernas längder, och ej heller vinklar mellan vektorer. Vi bestämmer avståndet från origo till de bägge planen.
Vi bestämmer t så att punkten med koordinater $t\bar{n}_1 = t(1, -2, 4)$ tillhör π_1. Vi får följande ekvation för t:

$$t - 2(-2t) + 4 \cdot 4t = 3,$$

dvs $t = 1/7$. Detta ger att planets avstånd d_1 till origo är

$$d_1 = ||\frac{1}{7}(1, -2, 4)|| = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Liknande räkningar

$$3 \cdot 3t - (-t) + 2 \cdot 2t = 7$$

med $t = 1/2$ ger π_2:s avstånd d_2 till origo som

$$d_2 = ||\frac{1}{2}(3, -1, 2)|| = \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

SVAR: Planen befinner sig på olika avstånd från origo och kan då inte avbildas på varandra med en ortogonalmatris.

(c) (2p) Undersök om det finns någon matris **B** med rang 2 för vilken ekvivalensen i ekvationen (1) ovan gäller.

Lösning. Vi definierar en linjär avbildning B vars matris **B** uppfyller de givna villkoren. Nämligen, definera B genom

$$B(1, -1, 0) = (2, -1, 0), \qquad B(2, 1, 0) = (1, 3, 0), \qquad B(0, 2, 1) = (1, 3, 0).$$

Då gäller att $\mathrm{Im}(B) = \mathrm{Span}\{(2, -1, 0), (1, 3, 0)\}$, vars dimension då är 2 och därmed $\mathrm{Rang}(\mathbf{B}) = 2$, samt

$$(x_1, x_2, x_3) \in \pi_1 \quad \Longrightarrow \quad (x_1, x_2, x_3) = (1, -1, 0) + t(2, 1, 0) + s(0, 2, 1) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad B(x_1, x_2, x_3) = (2, -1, 0) + (t + s)(1, 3, 0) \in \pi_2.$$

Eftersom $(1, -1, 0)$, $(2, 1, 0)$ och $(0, 2, 1)$ bildar en bas för R^3 gäller att

$$(x_1, x_2, x_3) \notin \pi_1 \qquad \Longrightarrow \quad (x_1, x_2, x_3) = r(1, -1, 0) + t(2, 1, 0) + s(0, 2, 1)$$

för något tal $r \neq 1$, eftersom (x_1, x_2, x_3) inte ligger i planet π_1. Men då gäller att

$$B(x_1, x_2, x_3) = r(2, -1, 0) + (t + s)(1, 3, 0).$$

vilket är punkter på en linje parallell med π_2. Eftersom denna linje inte ligger i π_2 om $r \neq 1$ så har vi att endast punkter i π_1 avbildas på punkter i π_2, och därmed

SVAR: Ja, en sådan matris **B** finns.

(d) (1p) Undersök om det finns någon matris **B** sådan att $\det(\mathbf{B}) = 1$ och för vilken ekvivalensen i ekvationen (1) ovan gäller.

Lösning. Vi bestämmer en matris $\mathbf{B}_\alpha$ enligt följande metod: Definierar vi avbildningen B_α genom

$$B_\alpha(1, -1, 0) = (2, -1, 0), \quad B_\alpha(1, 3, 0) = (2, 1, 0), \quad B_\alpha(0, 2, 1) = \alpha(0, 2, 1)$$

så gäller ekvivalensen i Ekvation (1), eftersom vektorerna $(2, 1, 0)$ och $\alpha(0, 2, 1)$, för $\alpha \neq 0$, spänner upp π_2. Avbildningens matris $\mathbf{B}_\alpha$ kan då härledas ur sambandet

$$\mathbf{B}_\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

genom multiplikation med inversen till matrisen direkt till vänster om likhetstecknet. Determinanten av $\mathbf{B}_\alpha$ satisfierar då

$$\det(\mathbf{B}_\alpha)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2\alpha \\ 0 & 0 & \alpha \end{vmatrix}$$

vilket med uträknade determinanter ger likheten

$$\det(\mathbf{B}_\alpha) \cdot 3 = \alpha \cdot 7.$$

Med $\alpha = 3/7$ har vi en matris $\mathbf{B}_\alpha$ vars determinant är lika med 1.

8. (1p+1p+2p, max 4p) Bestäm det största värdet som

$$\text{rang}(\mathbf{AB}) - \text{rang}(\mathbf{BA}).$$

kan anta för två $n \times n$-matriser $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$.

(**OBS.** En korrekt gissning ger 1p, en korrekt lösning när $n = 4$ ger 1p, och man får 4p för en korrekt lösning av problemet för godtyckligt n. Ett svar som motiveras med goda resonemang och ”kloka” argument kan komma att premieras med fler poäng än ett.)

Lösning. Låt $k = n/2$ om n är ett jämnt tal och låt $k = (n-1)/2$ om n är udda. Vi visar först att det finns linjära avbildningar A och B så att

$$\dim(\text{Im}(AB)) - \dim(\text{Im}(BA)) = k.$$

Låt $\bar{e}_1$, ..., $\bar{e}_k$, ..., $\bar{e}_n$ vara en bas för R^n och definiera linjära avbildningar A och B genom

$$A\bar{e}_i = \begin{cases} \bar{0} & \text{för} \quad i = 1, 2, \dots, k \\ \bar{e}_{i-k} & \text{för} \quad i = k+1, \dots, n \end{cases} \qquad B\bar{e}_i = \begin{cases} \bar{0} & \text{för} \quad i = 1, 2, \dots, k \\ \bar{e}_i & \text{för} \quad i = k+1, \dots, n \end{cases}$$

Vi betraktar nu först fallet n är ett jämnt tal. Då gäller

$$BA\bar{e}_i = \bar{0}, \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

dvs $BA = 0$. Vidare

$$AB\bar{e}_i = \begin{cases} \bar{0} & \text{för} \quad i = 1, 2, \dots, k \\ \bar{e}_{i-k} & \text{för} \quad i = k+1, \dots, n \end{cases}$$

dvs

$$\text{Im}(AB) = \text{Span}\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k\}.$$

och vi finner att

$$\dim(\text{Im}(AB)) - \dim(\text{Im}(BA)) = k - 0 = k.$$

Nu fallet n är ett udda tal. Då gäller

$$BA\bar{e}_i = \bar{0}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

och $BA\bar{e}_n = \bar{e}_{k+1}$, dvs $\dim(\mathrm{Im}(BA)) = 1$. Vidare

$$AB\bar{e}_i = \begin{cases} \bar{0} & \text{för} \quad i = 1, 2, \ldots, k \\ \bar{e}_{i-k} & \text{för} \quad i = k+1, \ldots, n \end{cases}$$

dvs

$$\mathrm{Im}(AB) = \mathrm{Span}\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_{k+1}\},$$

(eftersom om n är udda så är $n - k = k + 1$), och vi finner att

$$\dim(\mathrm{Im}(AB)) - \dim(\mathrm{Im}(BA)) = (k+1) - 1 = k.$$

Slutligen visar vi i bägge fallen att vi inte kan få ett större värde på skillnaden ovan.

Först inser vi att

$$\mathrm{Im}(AB) \subseteq \mathrm{Im}(A), \qquad \mathrm{Im}(AB) \subseteq A(\mathrm{Im}(B)).$$

vilket medför att

$$\dim(\mathrm{Im}(AB)) \leq r, \tag{2}$$

där r betecknar det minsta av talen s och t. Så fallen $\mathrm{Im}(A) = t \leq k$ eller $\mathrm{Im}(B) = s \leq k$ kan uteslutas om vi skall få ett större värde på skillnaden än k.

Vi antar hädanefter att $s > k$ och $t > k$ och observerar att då är både s och t större än $n/2$.

Fundamentalsatsen, applicerad på avbildningen B från $\mathrm{Im}(A)$ till R^n, ger att

$$\dim(\mathrm{Im}(BA)) = \dim(\mathrm{Im}(A)) - \dim(\ker(B) \cap \mathrm{Im}(A)) \geq t - (n - s) = t + s - n \tag{3}$$

eftersom

$$\dim(\ker(B)) = n - s \qquad \Longrightarrow \qquad \dim(\ker(B) \cap \mathrm{Im}(A)) \leq n - s.$$

Ekvationerna (2) och (3) ger nu att

$$\dim(\mathrm{Im}(AB)) - \dim(\mathrm{Im}(BA)) \leq r - (t + s - n) = n - s - t + r.$$

Eftersom r är lika med minst ett av talen s och t och båda dessa tal är större än $n/2$ har vi, om t ex $r = s$, att

$$n - s - t + r = n - t < n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}.$$

dvs, i bägge fallen att

$$\dim(\mathrm{Im}(AB)) - \dim(\mathrm{Im}(BA)) \leq k$$