Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till lappskrivning nummer 1A till kursen Linjär algebra för D, SF1604, den 28 januari 2014, kl 13.15-13.45.

Namn:

Resultat:

Bonuspoäng till tentan från denna lappskrivning är antalet godkända uppgifter nedan.

OBS Lösningarna skall motiveras väl och skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Bestäm en matris $\mathbf{X}$ sådan att

$$\mathbf{X}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösning. Vi finner att

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Låt $\mathbf{A}$ beteckna en 3×3-matris och låt $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ beteckna 3×1-matriser. Ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ har oändligt många lösningar varav $\mathbf{x} = (2\ \ 1\ \ 0)^T$ och $\mathbf{x}' = (1\ \ 2\ \ 1)^T$ är två av dessa. En av lösningarna till systemet $\mathbf{Ay} = \mathbf{c}$ är $\mathbf{y} = (1\ \ -1\ \ 1)^T$. Bestäm ytterligare två lösningar till systemet $\mathbf{Ay} = \mathbf{c}$.

Lösning. Då $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ och $\mathbf{Ax}' = \mathbf{b}$ så har vi att

$$\mathbf{0} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{Ax} - \mathbf{Ax}' = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \mathbf{A}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}) = \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vi finner då att

$$\mathbf{A}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\,\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{c} + t\,\mathbf{0} = \mathbf{c}.$$

Vi tar nu två olika t-värden, t ex $t = \pm1$, och får då två lösningar till, nämligen $\mathbf{y}' = (2\ \ -2\ \ 0)^T$ och $\mathbf{y}'' = (0\ \ 0\ \ 2)^T$