Matematiska Institutionen
KTH

Lappskrivning nummer 1B till kursen Linjär algebra för D, SF1604, den 30 januari 2013, kl 10.15-10.45.

Namn:

Resultat:

Bonuspoäng till tentan från denna lappskrivning är antalet godkända uppgifter nedan.

OBS Lösningarna skall motiveras väl och skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y - z + u = 0 \\ 3x + 4y + z - 2u = 0 \\ 2x + 3y + 2z - 3u = 0 \end{cases}$$

Lösning: Gausselimination med räkningar i tablåform ger

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

Bakåtsubstitution, med $z = t$ och $u = s$ godtyckliga reella tal, ger

$$y = -4z + 5u = -4t + 5s, \qquad x = -y + z - u = -(-4t + 5s) + t - s = 5t - 6s.$$

Således

SVAR: $(x, y, z, u) = t(5, -4, 1, 0) + s(-6, 5, 0, 1)$ med t och s godtyckliga reella tal.

2. Låt $\mathbf{A}$ beteckna en $n \times n$-matris och låt $\mathbf{x}$ liksom $\mathbf{y}$ beteckna $n \times 1$-matriser. Vidare låt $\mathbf{B} = \mathbf{AA}$, (dvs $\mathbf{B} = \mathbf{A}^2$), och låt $\mathbf{b}$ vara kolonnmatrisen $(1\ 2\ 3\ \ldots\ n)^T$. Är nedanstående påstående sant eller falskt?

”*Om ekvationen* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *har precis en lösning så har också ekvationen* $\mathbf{By} = \mathbf{b}$ *precis en lösning.*”

OBS. Ett korrekt svar utan en godtagbar motivering ger ingen poäng!!

Lösning: Sant. Det finns olika sätt att resonera, men om $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ har precis en lösning så har matrisen $\mathbf{A}$ ”full rang”, dvs med hjälp av elementära radoperationer kan $\mathbf{A}$ bringas på en uppåt triangulär form med alla diagonalelement skilda från noll. Då är matrisen $\mathbf{A}$ inverterbar och vi får

$$\mathbf{AAy} = \mathbf{b} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b},$$

som den enda möjliga lösningen, som vi verifierar att det verkligen är en lösning eftersom

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{By} = \mathbf{AAA}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{b}.$$